MATEMÁTICAS III

Bernardo Acevedo Frias.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA SEDE MANIZALES

MANIZALES. JUNIO 2014

Contenido

Prologo

El objetivo del presente libro, es el de facilitar al estudiante de las carreras de ingeniería, la asimilación clara de los conceptos matemáticos tratados, pues es el fruto de un cuidadoso análisis de los ejemplos resueltos y de los ejercicios propuestos con sus debidas respuestas, basado en mi experiencia como docente de la Universidad Nacional sede Manizales.

Desde luego que los escritos que se presentan no son originales, ni pretenden serlo, toda vez que es una recopilación organizada y analizada de difernte textos y de mi experiencia personal.

Este texto constituye un material de consulta obligada de los estudiantes, el cual les genera un diálogo directo con el profesor.

Bernardo Acevedo Frías
profesor asociado

Capítulo 1

Superficies

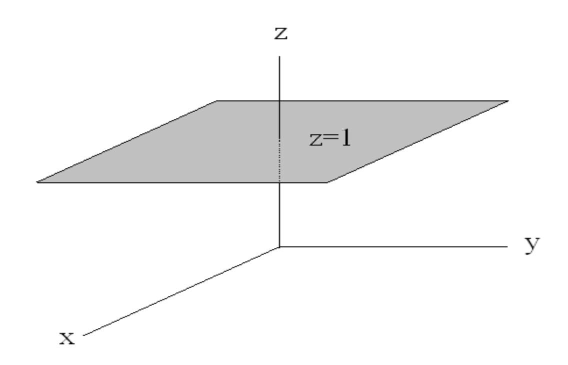
1.1 Introducción

En este primer capítulo se presenta el concepto de superficie y se hace un estudio detallado de las superficies cuádricas y al final se presenta una sección de ejercicios para que sean resueltos por los estudiantes y así puedan clarificar mejor sus conceptos.

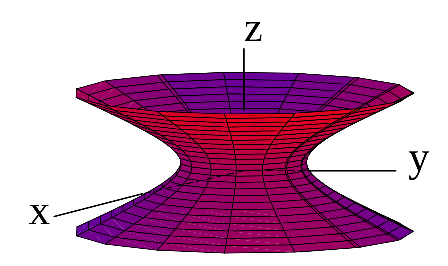
1.2 Definición de Superficie

El conjunto solución de la ecuación $f(x, y, z) = 0$, es el conjunto de todos los puntos $(x, y, z) \in R^3$, que satisfacen la ecuación y la representación geométrica del conjunto solución se llama **el gráfico de la ecuación** y al gráfico de una ecuación de la forma $f(x, y, z) = 0$ se llama **superficie.**

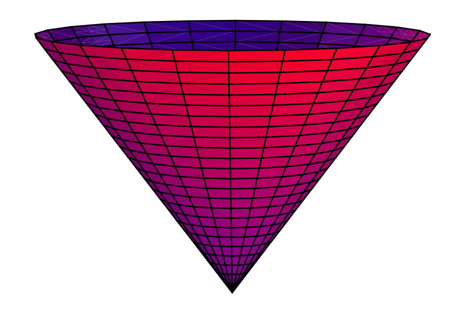
Ejemplo 1.1 *El gráfico de la ecuación* $z - 1 = 0$, *se observa en la figura siguiente, es la superficie del plano y se representa por la ecuación* $z = 1$



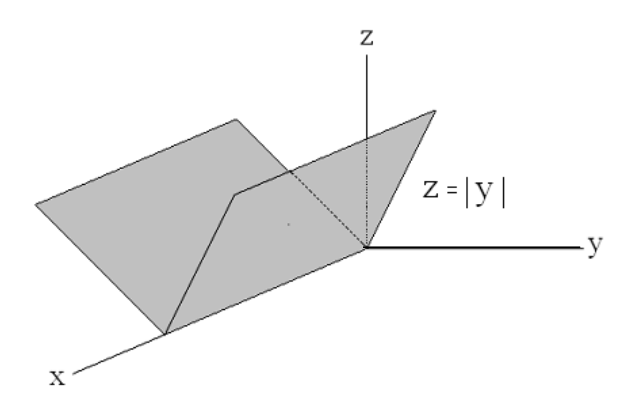
Ejemplo 1.2 *El gráfico de la ecuación* $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ *es la superficie que se observa en la figura*



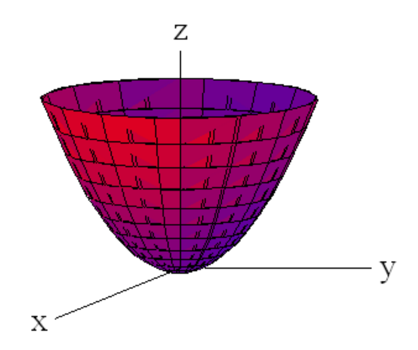
Ejemplo 1.3 *El gráfico de la ecuación* $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ *es la superficie que se observa en la figura*



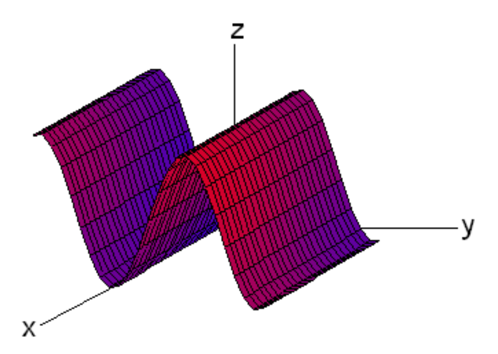
Ejemplo 1.4 *EL gráfico de la ecuación* $z - |y| = 0$ *es la superficie que se observa en la figura*



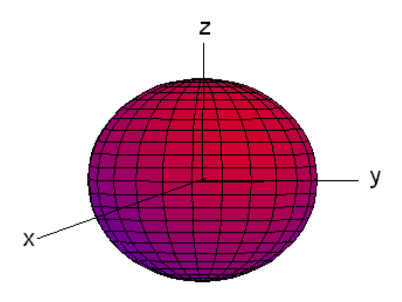
Ejemplo 1.5 *EL gráfico de la ecuación* $z - x^2 - y^2 = 0$, *es la superficie del paraboloide y se representa por la ecuación* $z = x^2 + y^2$



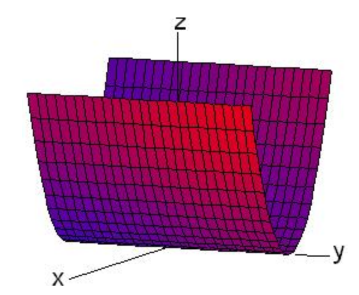
Ejemplo 1.6 *EL gráfico de la ecuación* $z - \sin y = 0$, *es la superficie que se observa en la figura*



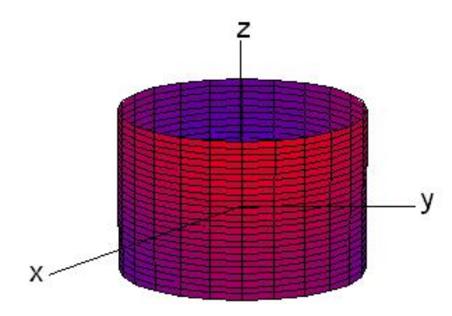
Ejemplo 1.7 *El gráfico de la ecuación* $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$, *es la superficie de una esfera y se observa en la figura siguiente, y se representa por* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$



Ejemplo 1.8 *EL gráfico de la ecuación* $z - x^2 = 0$, *es la superficie que se observa en la figura*



Ejemplo 1.9 *EL gráfico de la ecuación $x^2+y^2-1=0$, es la superficie del cilindro y se observa en la figura*



Un método útil de graficar una superfice es por medio de las Curvas de nivel que exponemos a continuación.

1.3 Curvas de Nivel

1.3.1 Definición

La curva de intersección de una superfice con el plano $z=k$ (constante) o con $x=k$ (constante) o con $y=k$ (constante), se llama **Curva de nivel.**

Para hallar las ecuaciones que representan las curvas de nivel de una superficie representada por $f(x,y,z)=0$ con $z=k$, se reemplaza z por k en la ecuación $f(x,y,z)=0$, para obtener $f(x,y,k)=0$ y si graficamos las curvas que representan estas ecuaciones en el plano $z=k$, obtenemos las curvas de nivel con $z=k$, y si las graficamos en el plano xy obtenemos lo que se llama un **Mapa de Contorno.**

En forma análoga se obtienen las curvas de nivel con el plano $x=k$ o $y=k$.

Ejemplo 1.10 *Hallar las curvas de nivel de $z=x^2+y^2$ con $z=k$.*

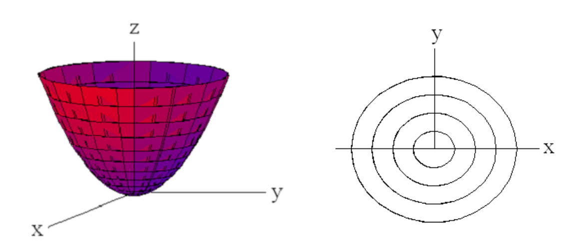
Las ecuaciones que representan las curvas de nivel de $z=x^2+y^2$ con $z=k$ son $k=x^2+y^2$; para $k\geq 0$; cuyos gráficos son circunferencias con centro (0,0) y radio $\sqrt{k}$,

por ejemplo si $k = 0$; entonces $x^2 + y^2 = 0$, que tiene por solución $(0, 0)$ y así la curva de nivel es el punto $(0, 0, 0)$.

si $k = 1$; entonces $x^2 + y^2 = 1$, cuyo gráfico en el plano xy es una circunferencia con centro (0,0) y radio 1, y la curva de nivel es el gráfico de esta circunferencia en el plano $z = 1$

si $k = 2$; entonces $x^2 + y^2 = 2$, cuyo gráfico en el plano xy es una circunferencia con centro (0,0) y radio $\sqrt{2}$, y la curva de nivel es el gráfico de la circunferencia en el plano $z = 2$

El mapa de contorno para $z = k$, consiste en graficar $x^2 + y^2 = k$ para $k \geq 0$ en el plano xy

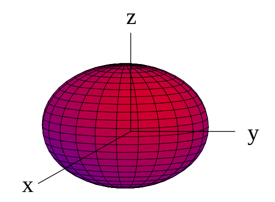


Las ecuaciones que representan las curvas de nivel de $z = x^2 + y^2$ con $y = k$ son $z = x^2 + k^2$, cuyos gráficos son parábolas para todo $k \in R$.

En forma análoga, las ecuaciones que representan las curvas de nivel de $z = x^2 + y^2$ con $x = k$,son $z = k^2 + y^2$, cuyos gráficos son parábolas para todo $k \in R$.

Ejemplo 1.11 *Si* $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, *las ecuaciones que representan las curvas de nivel con* $z = k$ *vienen dadas por* $x^2 + y^2 = 4 - k^2$ *para* $-2 \leq k \leq 2$ *pues* $4 - k^2 \geq 0$, *si solo si* $4 \geq k^2$ *si solo si* $2 \geq \sqrt[2]{k^2}$ *si solo si* $2 \geq |k|$ *si solo si* $-2 \leq k \leq 2$, *cuyos gráficos son circunferencias en sus respectivos planos, por ejemplo*

si $k = 0$; $x^2 + y^2 = 4$; la curva de nivel es una circuenferencia y se grafica en $z = 0$
si $k = \pm 1$; $x^2 + y^2 = 3$; la curva de nivel es una circuenferencia y se grafica en $z = \pm 1$
si $k = \pm 2$; $x^2 + y^2 = 0$; cuyo gráfico es $(0, 0)$ y las curvas de nivel los puntos $(0, 0, 2)$; $(0, 0, -2)$



1.4 Superficie Cuádrica

1.4.1 Definición

Superficie Cuádrica, es el gráfico de una ecuación de la forma

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Lx + My + Qz + P = 0$$

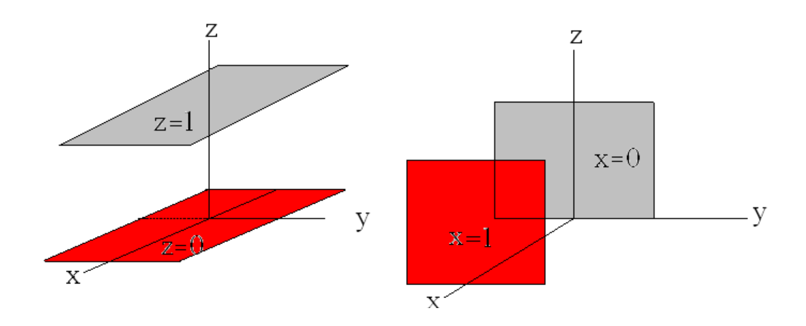
donde A,B,C,D,E,F,L,M,Q,P son constantes.

De la anterior ecuación se puede deducir las ecuaciones siguientes:

1.4.2 Plano

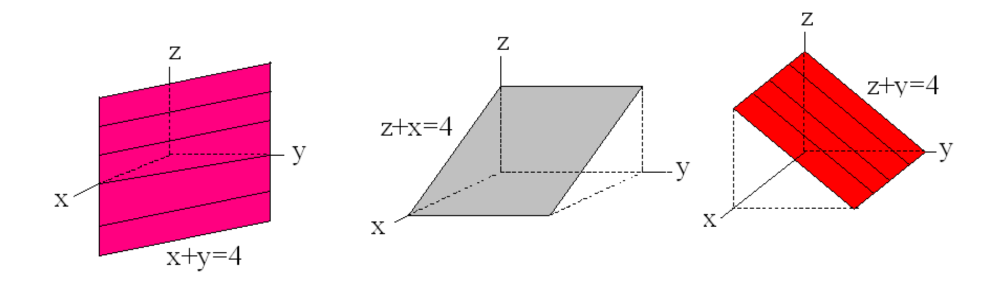
Es el gráfico de la ecuación $Ax + By + Cz - D = 0$. Su gráfico si existe, está representado por un plano y la ecuación se conoce como la ecuación del plano.

Ejemplo 1.12 *El gráfico de las ecuaciones* $z = 1$; $z = 0$; $x = 1$; $x = 0$; *son planos y se pueden observar en la figura siguiente*



Al plano $z = 0$; se llama el plano xy, al plano $y = 0$; se llama el plano xz, al plano $x = 0$, se llama el plano yz

Ejemplo 1.13 *El gráfico de las ecuaciones* $x + y = 4$; $x + z = 4$; $y + z = 4$; *son planos. Sus gráficos se observan en la figura:*

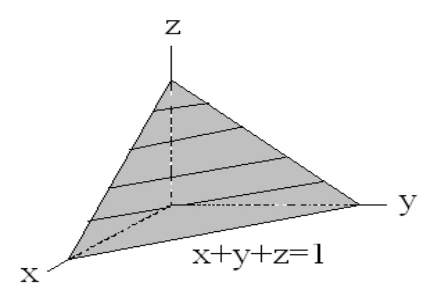


Para graficar la ecuación $x + y = 4$; observemos que las curvas de nivel con $z = k$; es siempre la misma ecuación $x+y = 4$ (una recta) en $z = k$, luego para obtener el gráfico, graficamos $x + y = 4$, en cada plano $z = k$

Para graficar $x + z = 4$; se hace $y = k$ para obtener $x + z = 4$ y se grafica siempre la misma ecuación $x + z = 4$ en cada plano $y = k$, en forma análoga para graficar $y + z = 4$; se hace $x = k$.

Ejemplo 1.14 *Para graficar* $x + y + z = 4$; *se puede hacer con cualquier curva de nivel* $z = k$ *o* $x = k$ *o* $y = k$

Si $z = k$ entonces las curvas de nivel son $x + y = 4 - k$; $k \in R$ pues
para $k = 0$; $x + y = 4$; su gráfico es una recta en el plano $z = 0$
para $k = 1$; $x + y = 3$; su gráfico es una recta en el plano $z = 1$
para $k = 2$; $x + y = 2$; su gráfico es una recta en el plano $z = 2$
para $k = 4$; $x + y = 0$; su gráfico es una recta en el plano $z = 4$ y el gráfico con sus curvas de nivel se pueden observar en la figura



ó también para graficar la ecuación $x + y + z = 4$, encontramos 3 puntos y hacemos pasar el plano por esos puntos, por ejemplo:
Si $x = y = 0$; entonces $z = 4$
Si $x = z = 0$; entonces $y = 4$
Si $y = z = 0$; entonces $x = 4$, y asi graficamos los puntos $(4, 0, 0), (0, 4, 0)$ y $(0, 0, 4)$, y hacemos pasar el plano por allí.

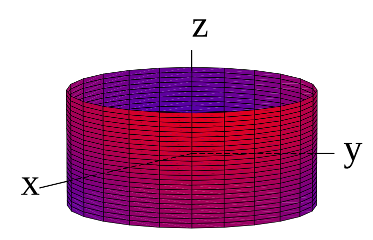
1.4.3 Cilindro circular o elíptico

Es el gráfico de la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{ó} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{ó} \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

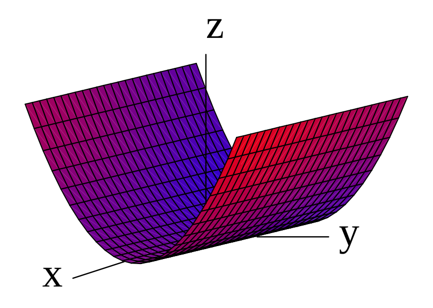
donde a,b,c son números reales positivos. Si $a = b$, en la primera ecuación, el gráfico de $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ se llama **cilindro circular**, y si $a \neq b$, el gráfico se llama **cilindro elíptico.**

Para hacer el gráfico de $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, se torma $z = k$ y sus curvas de nivel son las gráficas de $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ en $z = k$, que son elipses para todo k, luego para hacer su gráfico, en cada plano $z = k$, grafique la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. En forma análoga se torma $y = k$ para graficar $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ y $x = k$ para graficar $\dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$



1.4.4 Cilindros Parabólicos:

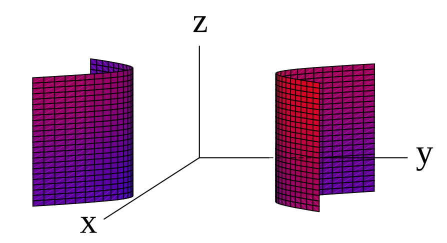
Las gráficas de $y = x^2$; $x = z^2$; $y = (x-1)^2$; $y = z^2$; $y - 3 = (x-2)^2$; $z = 4 - y^2$ representan cilindros parabólicos. Para graficar por ejemplo $z = y^2$, se toman las curvas de nivel por $x = k$, ya que la curva de nivel es siempre la misma ecuación $z = y^2$ y para hacer su gráfico, se grafica la parábola $z = y^2$ en cada plano $x = k$



1.4.5 Cilindros Hiperbólicos:

Las gráficas de $x^2 - y^2 = 1$; $y^2 - x^2 = 4$; $z^2 - y^2 = 1$; $z^2 - x^2 = 10$; $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{z^2}{9} = 1$ representan cilindros hiperbólicos.

Si graficamos por ejemplo la ecuación $y^2 - x^2 = 4$, se torma $z = k$, pues las curvas de nivel son las mismas curvas en cada plano para $z = k$



1.4.6 Paraboloide elíptico o circular

Es el gráfico de una de las ecuaciones

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = cz\,;\ a > 0, b > 0,\ c \neq 0, \quad \text{o} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2} = by\,; \quad b \neq 0 \quad \text{o} \quad \frac{z^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2} = ax\,; \quad a \neq 0$$

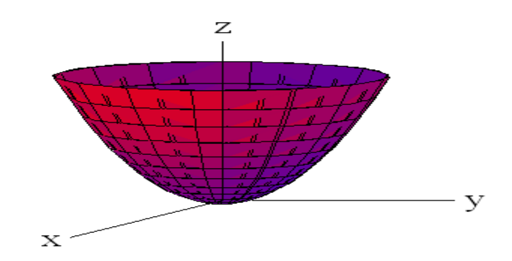
Una forma sencilla de graficar $z = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}$ es tomar $z = k$ y graficar las curvas de nivel, así: Si $z = k = 0$; entonces la curva de nivel es el gráfico de $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 0$ en $z = 0$, el punto $(0, 0, 0)$. Si $k = 1$; la curva de nivel es el gráfico de $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ una elipse en el plano $z = 1$

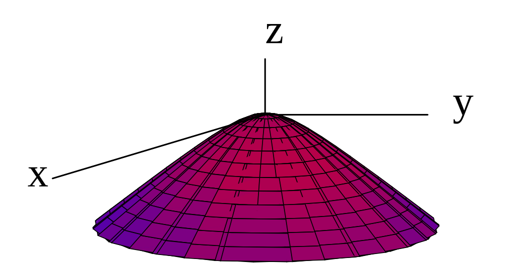
si $k = 2$; la curva de nivel es el gráfico de $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 2$ una elipse en el plano $z = 2$ y para $z = k > 0$, las curvas de nivel son los gráfico de las elipses $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = k$ en cada plano

También se puede hallar las curvas de nivel con los planos coordenados (llamadas trazas), graficarlas y luego utilizar las curvas de nivel que se necesiten así: Si $z = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}$ entonces

$$\text{con } z = 0; \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 0 \quad \text{el punto } (0, 0, 0), \text{ con } x = 0; \quad z = \frac{y^2}{9}, \text{ con } y = 0; \quad z = \frac{x^2}{4}$$

En forma análoga si $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = -z$, el gráfico es hacia abajo, figura siguiente





y en forma análoga se grafica:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = by \qquad y \qquad \frac{z^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} = ax$$

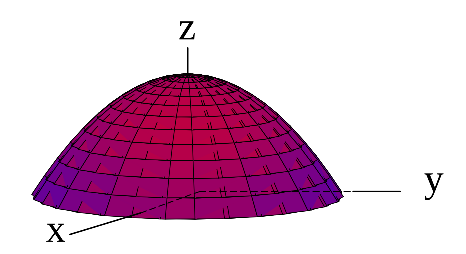
Ejemplo 1.15 *Graficar* $z = 16 - x^2 - y^2$

Si $z = 16 - x^2 - y^2$, entonces las ecuaciones que representan las curvas de nivel con los planos coordenados son:

Si $z = 0$; $16 - x^2 - y^2 = 0$; una circunferencia en el plano $z = 0$

Si $x = 0$; $z = 16 - y^2$; cuyo gráfico es una parábola abriéndose hacia abajo en el plano zy

Si $y = 0$; $z = 16 - x^2$; cuyo gráfico es una parábola abriéndose hacia abajo en el plano zx



1.4.7 Paraboloide hiperbólico

Es el gráfico de la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=cz, a>0, b>0,\ c\neq 0,\quad \acute{o} \qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=by;\quad b\neq 0 \ \text{ ó } \quad \frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=ax\,;\quad a\neq 0$$

Por ejemplo, si queremos graficar $x^2-y^2=z$, buscamos las ecuaciones que representan las curvas de nivel así:

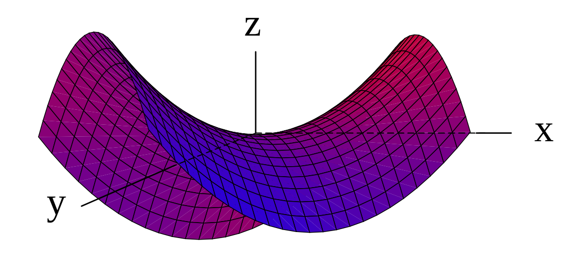
Si $z=0$; $x^2-y^2=0$, dos rectas $y=\pm x$

Si $x=0$; $-y^2=z$, cuyo gráfico es una parábola abriendose hacia abajo en el eje z

Si $y=0$; $x^2=z$, cuyo gráfico es una parábola abriendose hacia arriba en el eje z

Si $z=k>0$; cuyo gráfico son hiperbolas abriendose en el eje x $x^2-y^2=k$

Si $z=k<0$; cuyo gráfico son hipérbolas abriendose en el eje y



Las demás gráficas se hacen en forma análoga.

1.4.8 Hiperboloide de una hoja

Es el gráfico de la ecuación

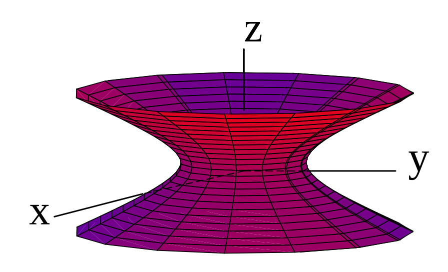
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1;\quad \acute{o}\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;\quad \acute{o}\quad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, a>0, b>0, c>0$$

Si se quiere graficar $x^2+y^2-z^2=1$, tomaremos las curvas de nivel por $z=k$ y graficaremos las circunferencias $x^2+y^2=1+k^2$ en cada plano $z=k$ o también hallamos las trazas y las graficamos así:

Si $z=0$; la ecuación de la curva de nivel es $x^2+y^2=1$, ecuación que representa una circunferencia

Si $y=0$; la curva de nivel es $x^2-z^2=1$, ecuación que representa una hipérbola

Si $x=0$; la ecuación de la curva de nivel es $y^2-z^2=1$, ecuación que representa una hipérbola



En forma análoga se grafican los demás ecuaciones

1.4.9 Elipsoide

Es el gráfico de la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ a>0,b>0,c>0$$

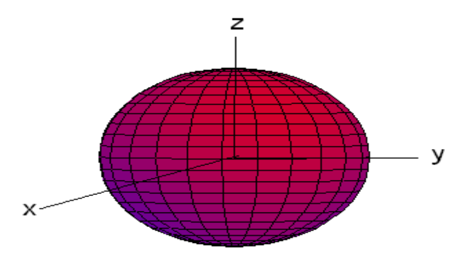
Por ejemplo si se quiere graficar la ecuación

$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{25}=1,$ su gráfico se hará con las curvas de nivel con $z=k$, pues las curvas de nivel son $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1-\frac{k^2}{25}$, cuyas gráficas son circunferencias si $-5\leq k\leq 5$ o con las trazas que son las curvas de nivel con los planos coordenados así:

$z=0;\quad \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1;$ la curva de nivel es una elipse en el plano xy

$x=0;\quad \frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{25}=1;$ la curva de nivel es una elipse en el plano yz

$y=0;\quad \frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{25}=1;$ la curva de nivel es una elipse en el plano xz

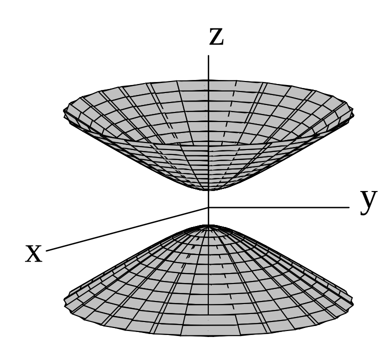


1.4.10 Hiperboloide de dos hojas

Es el gráfico de la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\ \text{ó}\quad -\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\quad \text{ó}\quad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\quad a>0,b>0,c>0$$

Si por ejemplo se quiere graficar $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$, entonces las curvas de nivel son:
para $z = 0$; $-x^2 - y^2 = 1$ ecuación que no representa ningún lugar geométrico
para $x = 0$; $z^2 - y^2 = 1$; ecuación que representa una hipérbola
para $y = 0$; $z^2 - x^2 = 1$; ecuación que representa una hipérbola
Si $z = k$; $x^2+y^2 = k^2-1$; $k < -1$; $k > 1$, ecuación que representa circunferencias



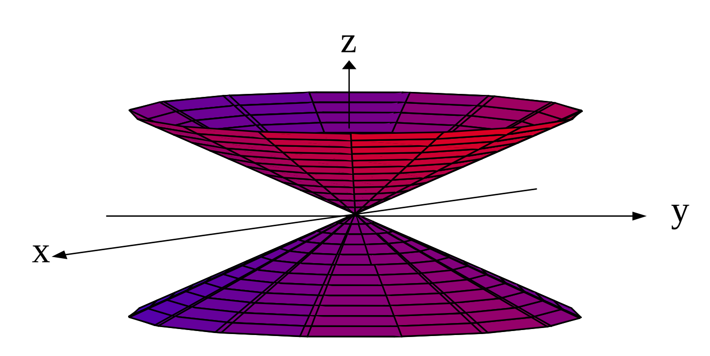
En forma análoga se grafican los demás ecuaciones.

1.4.11 Cono

Es el gráfico de la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} \quad \text{ó} \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} \quad \text{ó} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{y^2}{b^2}, \; a > 0, b > 0, c > 0$$

Por ejemplo si se tiene $x^2 + y^2 = z^2$; una forma fácil para hacer el gráfico de esta ecuación, es tomar las curvas de nivel con $z = k$, que son $x^2 + y^2 = k^2$, cuyos gráficos son circunferencias en sus respectivos planos



En forma análoga se grafican los demás ecuaciones

Ejercicio 1

1. Hacer un bosquejo del sólido limitado por el gráfico de la ecuación $x^2+y^2+z^2=9$
2. Hacer un bosquejo del sólido limitado por los gráficos de las ecuaciónes
$$x^2+y^2+z^2=9, z=1, z\geq 1$$
3. Hacer un bosquejo del sólido limitado por los gráficos de las ecuaciónes
$$x^2+y^2+z^2=9, z=1, z\leq 1$$
4. Hacer un bosquejo del sólido limitado por los gráficos de las ecuaciónes
$$z=7, z=-1, y=6, x=3, x=0, y=0$$
.
5. Hacer un bosquejo del sólido limitado por los gráficos de las ecuaciónes
$$x^2+y^2=9, z=4, z=-2$$
6. Hacer un bosquejo delsólido limitado por los gráficos de las ecuaciónes
$$x=0, y=0, z=0, x+y=6, z=7$$
7. Hacer un bosquejo del sólido limitado por los gráficos de las ecuaciónes
$$z=x^2+y^2, z=6.$$
8. Hacer un bosquejo del sólido limitado por los gráficos de las ecuaciónes
$$z=x, z=0, y^2=4-x$$
9. Hacer un bosquejo del sólido limitado por los gráficos de las ecuaciónes
$$z=0, z=5, y=9, y=x^2$$

10. Hacer un bosquejo del sólido limitado por los gráficos de las ecuaciónes

$$3z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 + z^2 = 16 \,(\text{ parte común})$$

11. Hacer un bosquejo del sólido limitado por los gráficos de las ecuaciónes

$$z = 4 - |x| - |y|\,, z = 0$$

12. Hacer un bosquejo del sólido limitado por los gráficos de las ecuaciónes

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9, z = 0, z \leq 0$$

13. Hacer un bosquejo del sólido limitado por el gráfico de la ecuación

$$x^2 + y^2 + (z-9)^2 = 81$$

14. Hacer un bosquejo del sólido limitado por los gráficos de las ecuaciónes

$$x + y = 5,\ y^2 = 2x - 2, z = 4, z = 0.$$

15. Hacer un bosquejo del sólido limitado por los gráficos de las ecuaciónes

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9, x^2 + y^2 = 5 \,(\text{parte común})$$

16. Hacer un bosquejo del sólido limitado por los gráficos de las ecuaciónes

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9, x^2 + y^2 = z^2 \,(\text{parte común})$$

17. Hacer un bosquejo del sólido limitado por los gráficos de las ecuaciónes

$$z = x^2 + y^2, z = x.$$

18. Hacer un bosquejo del sólido limitado por los gráficos de las ecuaciónes

$$z = x^2 + y^2, z = y$$

19. Hacer un bosquejo del sólido limitado por los gráficos de las ecuaciónes

$$2z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = 2x, z = 0$$

20. Hacer un bosquejo del sólido limitado por los gráficos de las ecuaciónes(común)

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$$

21. Hacer un bosquejo del sólido limitado por los gráficos de las ecuaciónes

$$z = 16 - \sqrt{x^2 + y^2}, z = 2$$

22. Hacer un bosquejo del sólido limitado por los gráficos de las ecuaciónes

$$z = 4 - x^2, y = 0, y = 9, z = 0$$

23. Hacer un bosquejo del sólido limitado por los gráficos de las ecuaciónes

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = x^2 + y^2.$$

24. Hacer un bosquejo del sólido limitado por los gráficos de las ecuaciónes

$$z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 = 1, z = 0.$$

25. Hacer un bosquejo del sólido limitado por los gráficos de las ecuaciónes

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = 4.$$

26. Hacer un bosquejo del sólido limitado por los gráficos de las ecuaciónes $x+y+z = 6$, y los planos coordenados

.

Capítulo 2

Funciones

2.1 Introducción

En este capítulo se presenta, el concepto de función, límites y derivadas de funciones de varias variables, el vector gradiente y sus propiedades, las derivadas de orden superior, la derivada direccional de una función, sus propiedades, la diferencial, su definición, sus principales propiedades y una variedad de ejemplos en los diversos temas, para que el estudiante pueda comprender con mayor claridad estos conceptos

2.2 Definición

Sea $D \subseteq \mathbb{R}^n$, una función $f : D \to \mathbb{R}$ es una regla que asigna a cada punto x en D, un número real único, denotado por $f(x)$.

El conjunto D se llama Dominio de la función y al conjunto de todos los números reales $f(x)$ con $x \in D$ se llama recorrido de la función. A las funciones $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}^n$, se llaman campos escalares y a las funciones $f : D \to \mathbb{R}^m$, se llaman campos vectoriales, así por ejemplo $f(x,y) = x + y$, $(f : R^2 \to \mathbb{R})$ es un campo escalar o una función real de dos variables reales y por ejemplo $f(x) = (x, sinx, cosx)$ $(f : R \to \mathbb{R}^3)$ es una función vectorial de variable real y $f(x,y) = (x+y, x-y, y)$ $(f : R^2 \to \mathbb{R}^3)$ es un campo vectorial

Ejemplo 2.1 $f(x,y) = x^2 + y^2$. *Su dominio es* $\mathbb{R}^2$ *y su recorrido* $[0, +\infty)$

Ejemplo 2.2 $f(x,y) = 4 - |x| - |y|$, *Dominio* $\mathbb{R}^2$ *y su recorrido* $(-\infty, 4]$

Ejemplo 2.3

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \sqrt{25 - x^2 - y^2};\ D_f = \left\{(x,y) \mid 25 - x^2 - y^2 \geq 0\right\} = \left\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 25\right\} \\ R_f &= [0,5] \end{aligned}$$

Ejemplo 2.4 $f(x,y)=\sin(xy)$; *Dominio todo* $\mathbb{R}^2$ *y recorrido* $[-1,1]$

Ejemplo 2.5 $f(x,y)=arcsen(xy)$, *Dominio* $\{(x,y)\mid -1\le xy\le 1\}$ *y recorrido* $\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

Ejemplo 2.6 $f(x,y)=\sqrt{x}$; *Dominio* $\{(x,y)\mid x\ge 0\}$ *y recorrido* $[0,+\infty)$

Ejemplo 2.7 $f(x,y)=\sqrt{y-x^2}$, *Dominio* $\{(x,y)\mid y\ge x^2\}$ *y recorrido* $[0,+\infty)$

Ejemplo 2.8 $f(x,y)=arctan(x+y)$, *Dominio todo* $\mathbb{R}^2$ *y recorrido* $\left(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

Ejemplo 2.9 $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$, *Dominio todo* $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ *y recorrido* R

Ejemplo 2.10 $f(x,y)=x^2-y^2$, *Dominio todo* $\mathbb{R}^2$ *y recorrido* R

Ejemplo 2.11 $f(x,y)=1$, *Dominio todo* $\mathbb{R}^2$ *y recorrido* $\{1\}$

Ejemplo 2.12 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2-y^2}{x-y} & si\ x\neq y\\ 2 & x=y\end{cases}$ *Dominio todo* $\mathbb{R}^2$

Ejemplo 2.13 $f(x,y,z)=\begin{cases}\frac{x-y+z}{x^2+y^2+z^2} & si\quad (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 0 & si\quad (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$ *Dominio todo* $\mathbb{R}^3$

Ejemplo 2.14 $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ *Dominio todo* $\mathbb{R}^3$ *y recorrido* $[0,\infty)$

Ejemplo 2.15 $f(x,y)=\arcsin(x+y)$ *Dominio* $-1\le x+y\le 1$ *y recorrido* $[-\pi/2,\pi/2]$

2.3 Límites

En esta sección, se trata el concepto de límite, sus principales propiedades y una variedad de ejemplos resueltos, al igual que una sección de ejercicios propuestos con sus respuestas respectivas.

Recordemos que en una variable si los valores de $f(x)$ se encuentran arbitrariamente cercanos a un número real fijo L, para todos los valores suficientemente próximos a a, decimos que la función $f(x)$ tiene límite L cuando x tiende a a y escribimos

$$\lim_{x\to a} f(x)=L$$

En forma más rigurosa se dice que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

si solo si, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si

$$0 < |x - a| < \delta \quad \text{implica que} \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Recordemos que

$$|x - a| < \delta \ \text{ sisi } \ -\delta < x - a < \delta \ \text{ sisi } \ a - \delta < x < a + \delta \ \text{ y que}$$

$$|f(x) - L| < \varepsilon \ \text{ si solo si } \ -\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon \ \text{ si solo si } \ L - \varepsilon < f(x) < \varepsilon + L$$

luego

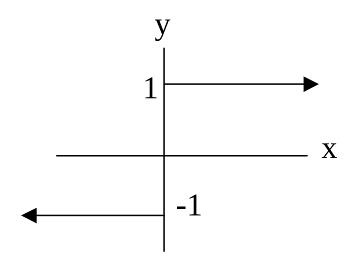
$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \text{si solo si } \ (\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)$$

tal que si

$$x \in (a - \delta, a + \delta) \Rightarrow f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$$

Ejemplo 2.16 *Mostrar que*

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x} \quad \textit{no existe}$$



En la figura anterior, se puede observar el gráfico de la función $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ y se concluye que cuando x se acerca a cero por valores positivos el valor de la función se acerca a 1 y cuando x se acerca a cero por valores negativos, el valor de la función se acerca a -1 y en este caso se afirma que

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x} \quad \text{no existe}$$

pues para todo $\forall\varepsilon > 0$, no existe $\delta > 0$ tal que si

$$x \in (-\delta, \delta) \Rightarrow f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$$

pues para valores positivos de x, sus imágenes están en $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$, pero para x negativo sus imágenes no están allí. En forma análoga con $(-1-\varepsilon, -1+\varepsilon)$.

El tratado de límites en varias variables se hace en forma similar al de una variable, pues

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L \text{ si solo si } (\forall\varepsilon > 0)\,(\exists\delta > 0)$$

tal que si

$$0 < |(x,y) - (a,b)| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon$$

En otras palabras $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ si solo si $(\forall\varepsilon > 0)\,(\exists\delta > 0)$ tal que si

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 < \delta^2 \text{ implica } f(x,y) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$$

luego, si para todo (x,y) cerca de (a,b) por todas partes, sus imágenes se acercan a un número real fijo L, entonces se puede afirmar que $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$, y que en otro caso el límite no existe.

Ejemplo 2.17 *Se puede demostrar que:*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} x = a; \quad \lim_{(x,y)\to(a,b)} y = b; \quad \lim_{(x,y)\to(a,b)} k = k;$$

2.3.1 Propiedades de los límites

1. El límite cuando existe es único.

2. Si

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = A; \quad \text{y} \quad \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = B \text{ entonces}$$

   (a)

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} [f(x,y) \pm g(x,y)] = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) \pm \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = A \pm B$$

   (b)

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} (fg)(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = A.B$$

(c)

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \left(\frac{f}{g}\right)(x,y) = \frac{\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)}{\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)} = \frac{A}{B}; \quad B \neq 0$$

3. Si

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = A \neq 0 \text{ y } \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = 0 \text{ entonces}$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} \quad \text{no existe}$$

Ejemplo 2.18 *Calcular el valor de*

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2+y}{xy+2}$$

En efecto:

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2+y}{xy+2} = \frac{\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} x \lim_{(x,y)\to(1,1)} x + \lim_{(x,y)\to(1,1)} y}{\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} x \lim_{(x,y)\to(1,1)} y + \lim_{(x,y)\to(1,1)} 2} = \frac{2}{3}$$

aplicando las propiedades de los límites

Ejemplo 2.19 *Calcular el valor de*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2+1}{xy}$$

En efecto :

$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2+1}{xy}$ *no existe, pues* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2+y^2+1 = 1 \neq 0$ *y* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy = 0$

Ejemplo 2.20

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2+4}{xy+2} = \frac{4}{2} = 2$$

Ahora se mostrarán algunos ejemplos cuando no es aplicable la teoría, por ejemplo si al reemplazar nos queda una forma indeterminada como por ejemplo $\frac{0}{0}$, que se debe hacer.

Ejemplo 2.21 *Calcular el valor de*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2 - xy}{\sqrt{y} - \sqrt{x}}$$

En efecto :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2 - xy}{\sqrt{y} - \sqrt{x}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y(y-x)}{\sqrt{y} - \sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y(y-x)(\sqrt{y}+\sqrt{x})}{(\sqrt{y} - \sqrt{x})(\sqrt{y}+\sqrt{x})} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} y(\sqrt{y}+\sqrt{x}) = 0$$

En este caso hay que racionalizar el denominador y luego simplificar.

Ejemplo 2.22 *Calcular el valor de*

$$\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x+y-4}{\sqrt{x+y}-2}$$

En efecto :

$$\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x+y-4}{\sqrt{x+y}-2} = \lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{(x+y-4)(\sqrt{x+y}+2)}{(\sqrt{x+y}-2)(\sqrt{x+y}+2)} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{(x+y-4)(\sqrt{x+y}+2)}{x+y-4} = \lim_{(x,y)\to(2,2)} \sqrt{x+y}+2 = 4$$

En este ejemplo hay que racionalizar el denominador y luego simplificar

Ejemplo 2.23 *Calcular el valor de*

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{xy - y - 2x + 2}{x-1}$$

En efecto :

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{xy - y - 2x + 2}{x-1} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{y(x-1) - 2(x-1)}{x-1}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x-1)(y-2)}{(x-1)} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} (y-2) = -1$$

En este ejemplo hay que factorizar y luego simplificar

Ejemplo 2.24 *Calcular el valor de*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}$$

En efecto :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2} = \lim_{u\to 0}\frac{e^u-1}{u} = \lim_{u\to 0}\frac{e^u}{1} = 1 \quad \textit{haciendo } u = x^2+y^2$$

En este ejemplo hay que hacer un cambio de vaiable y luego aplicar lo conocido

Ejemplo 2.25 *Calcular el valor de*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\tan(x+y)}{x+y}$$

En efecto :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\tan(x+y)}{x+y} = \lim_{u\to 0}\frac{\tan(u)}{u} = \lim_{u\to 0}\frac{\sin(u)}{u} * \frac{1}{\cos(u)} =$$

$$= \lim_{u\to 0}\frac{\sin(u)}{u}\lim_{u\to 0}\frac{1}{\cos u} = 1 \quad \textit{haciendo } u = x+y$$

En este ejemplo hay que hacer un cambio de vaiable y luego aplicar las propiedades de límites

Ejemplo 2.26 *Calcular el valor de*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(e^x-1)(e^{2y}-1)}{xy}$$

En efecto :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(e^x-1)(e^{2y}-1)}{xy} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2(e^x-1)}{x} * \frac{(e^{2y}-1)}{2y} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2(e^x-1)}{x} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(e^{2y}-1)}{2y} = 2*1 = 2$$

Ejemplo 2.27 *Calcular el valor de*

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x^3-1)(y^4-1)}{(x-1)(y^2-1)}$$

En efecto :

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x^3-1)(y^4-1)}{(x-1)(y^2-1)} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x-1)(x^2+x+1)(y^2-1)(y^2+1)}{(x-1)(y^2-1)}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(1,1)} (x^2+x+1)(y^2+1) = 3*2 = 6$$

En este ejemplo hay que factorizar y luego simplificar

Ahora en una forma general, si se quiere demostrar que

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

se puede hacer de la forma siguiente: Se busca una función $h(x,y)$ que satisfaga la desigualdad

$$0 \leq |f(x,y) - L| \leq h(x,y) \quad \text{con} \lim_{(x,y)\to(a,b)} h(x,y) = 0 \; ;$$

ya que como

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} 0 = 0 \;\; \text{y} \;\; \lim_{(x,y)\to(a,b)} h(x,y) = 0$$

se concluye por el teorema del emparedado que:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} |f(x,y) - L| = 0 \;\; \text{y así} \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

Ejemplo 2.28 *Probar que*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{|x|+|y|} = 0.$$

En efecto :

$$0 \leq \left| \frac{xy}{|x|+|y|} - 0 \right| = \left| \frac{xy}{|x|+|y|} \right| = \frac{|xy|}{|x|+|y|} = \frac{|x|\,|y|}{|x|+|y|} \leq |y| * 1$$

$$\textit{ya que como} \quad |x| \leq |x| + |y|\,, \quad \textit{entonces} \; \frac{|x|}{|x|+|y|} \leq 1$$

así

$$0 \leq \left| \frac{xy}{|x|+|y|} - 0 \right| \leq |y|$$

y como

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0 \;\; \textit{se concluye que} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{xy}{|x|+|y|} - 0 \right| = 0$$

$$\textit{lo que implica que} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{|x|+|y|} = 0$$

Ejemplo 2.29 *Probar que*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 y}{|x|^3 + |y|^3} = 0.$$

En efecto :

$$0 \le \left| \frac{x^4 y}{|x|^3 + |y|^3} - 0 \right| = \left| \frac{x^4 y}{|x|^3 + |y|^3} \right| = \frac{x^4 |y|}{|x|^3 + |y|^3} = \frac{|x|^3 |x| |y|}{|x|^3 + |y|^3} \le |x| |y|$$

$$\text{ya que } \frac{|x|^3}{|x|^3 + |y|^3} \le 1$$

así

$$0 \le \left| \frac{x^4 y}{|x|^3 + |y|^3} - 0 \right| \le |x| |y|$$

y como

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} |x| |y| = 0 \quad \text{se concluye que} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{x^4 y}{|x|^3 + |y|^3} - 0 \right| = 0$$

y así

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 y}{|x|^3 + |y|^3} = 0$$

Ejemplo 2.30 *Probar que*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2 - y^2)}{|x| + |y|} = 0.$$

En efecto :

$$0 \le \left| \frac{\sin(x^2 - y^2)}{|x| + |y|} - 0 \right| = \frac{|\sin(x^2 - y^2)|}{|x| + |y|} \le \frac{|x^2 - y^2|}{|x| + |y|}$$

$$= \frac{|x - y| |x + y|}{|x| + |y|} \le \frac{(|x| + |y|) |x + y|}{|x| + |y|} = |x + y|$$

así

$$0 \le \left| \frac{\sin(x^2 - y^2)}{|x| + |y|} - 0 \right| \le |x + y|$$

como

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} |x + y| = 0 \quad \text{se concluye que} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2 - y^2)}{|x| + |y|} = 0$$

Ejemplo 2.31 *Probar que*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{|x|^3+|y|^3} = 0.$$

En efecto :

$$0 \le \left|\frac{x^2y^2}{|x|^3+|y|^3} - 0\right| = \frac{x^2y^2}{|x|^3+|y|^3} \le \frac{\frac{x^4}{2}+\frac{y^4}{2}}{|x|^3+|y|^3}$$

$$= \frac{x^4}{2|x|^3+2|y|^3} + \frac{y^4}{2|x|^3+2|y|^3} = \frac{|x|\,|x|^3}{2|x|^3+2|y|^3} + \frac{|y|\,|y|^3}{2|x|^3+2|y|^3} \le \frac{|x|}{2} + \frac{|y|}{2}$$

así

$$0 \le \left|\frac{x^2y^2}{|x|^3+|y|^3} - 0\right| \le \frac{|x|}{2} + \frac{|y|}{2}$$

y como

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|}{2} + \frac{|y|}{2} = 0 \quad \textit{se concluye que} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{|x|^3+|y|^3} = 0$$

Recuerde:

$$\left(x^2-y^2\right)^2 \ge 0 \quad \textit{si solo si} \quad x^4 - 2x^2y^2 + y^4 \ge 0 \quad \textit{si solo si}$$

$$x^4 + y^4 \ge 2x^2y^2 \quad \textit{si solo si} \quad \frac{x^4}{2} + \frac{y^4}{2} \ge x^2y^2$$

Ejemplo 2.32 *Probar que*

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 0$$

En efecto :

$$0 \le \left|\frac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - 0\right| = \frac{|xyz|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{|x|\,|y|\,|z|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{\sqrt{x^2}\,|y|\,|z|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \le |y|\,|z|$$

así

$$0 \le \left|\frac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - 0\right| \le |y|\,|z|$$

$$\textit{y como} \quad \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} 0 = \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} |y|\,|z| = 0 \quad \textit{se concluye que}$$

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 0$$

Ejemplo 2.33 *Probar que*

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2+y^3+z^4}{|x|+y^2+|z|^3} = 0$$

En efecto :

$$0 \le \left| \frac{x^2+y^3+z^4}{|x|+y^2+|z|^3} - 0 \right| = \frac{|x^2+y^3+z^4|}{|x|+y^2+|z|^3} \le \frac{x^2+|y^3|+z^4}{|x|+y^2+|z|^3}$$

$$= \frac{|x|\,|x|}{|x|+y^2+|z|^3} + \frac{y^2\,|y|}{|x|+y^2+|z|^3} + \frac{|z|^3\,|z|}{|x|+y^2+|z|^3} \le |x|+|y|+|z|$$

así

$$0 \le \left| \frac{x^2+y^3+z^4}{|x|+y^2+|z|^3} - 0 \right| \le |x|+|y|+|z|$$

y como

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} 0 = \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} |x|+|y|+|z| = 0 \quad \textit{se concluye que}$$

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \left| \frac{x^2+y^3+z^4}{|x|+y^2+|z|^3} - 0 \right| = 0$$

y asi

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2+y^3+z^4}{|x|+y^2+|z|^3} = 0$$

Ejemplo 2.34 *Probar que*

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy^2z}{x^4+y^2+|z|^3} = 0$$

En efecto :

$$0 \le \left| \frac{xy^2z}{x^4+y^2+|z|^3} - 0 \right| = \frac{|x|\,y^2\,|z|}{|x|+y^2+|z|^3} \le |x|\,|z|\,;$$

así

$$0 \le \left| \frac{xy^2z}{x^4+y^2+|z|^3} - 0 \right| \le |x|\,|z|$$

como

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} 0 = \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} |x|\,|z| = 0 \quad \textit{se concluye que} \quad \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy^2z}{x^4+y^2+|z|^3} = 0$$

Ejemplo 2.35 *Probar que*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x+y} \quad \text{no existe.}$$

En efecto : Hay que hallar 2 caminos diferentes en el dominio de la función, que pasen por $(0,0)$ *y que tenga límites diferentes, por ejemplo, por el camino* (x,x) *se tiene*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x+y} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x+x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

y por el camino $(x,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x+y} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$$

por lo tanto

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x+y} \quad \text{no existe.}$$

Ejemplo 2.36

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x}{x+y+z} \quad \text{no existe.}$$

En efecto : Hay que hallar 2 caminos diferentes en el dominio de la función, que pasen por $(0,0,0)$ *y que tenga límites diferentes, por ejemplo, por el camino* (x,x,x) *se tiene*

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x}{x+y+z} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x+x+x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$$

y por el camino $(x,0.0)$

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x}{x+y+z} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$$

por lo tanto

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x}{x+y+z} \quad \text{no existe.}$$

Ejemplo 2.37

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2} \quad \text{no existe.}$$

En efecto : Hay que hallar 2 caminos diferentes en el dominio de la función, que pasen por $(0,0,0)$ *y que tenga límites diferentes, por ejemplo, por el camino* (x,x,x) *se tiene*

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+x^2+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}$$

y por el camino $(x, 0.0)$

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

por lo tanto

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2} \quad \textit{no existe.}$$

Ejemplo 2.38 *Probar que*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \quad \textit{no existe.}$$

En efecto : Hay que hallar 2 caminos diferentes en el dominio de la función, que pasen por $(0,0)$ *y que tenga límites diferentes, por ejemplo, por el camino* (x,x) *se tiene*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{2x^2} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

y por el camino $(0,x)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} -\frac{y^2}{y^2} = \lim_{x\to 0}(-1) = -1$$

por lo tanto

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \quad \textit{no existe.}$$

Ejemplo 2.39

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2-y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2} \quad \textit{no existe.}$$

En efecto : Hay que hallar 2 caminos diferentes en el dominio de la función, que pasen por $(0,0,0)$ *y que tenga límites diferentes, por ejemplo, por el camino* (x,x,x) *se tiene*

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+x^2+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}$$

y por el camino $(x, 0.0)$

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2-y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

por lo tanto

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2-y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2} \quad \textit{no existe.}$$

Ejemplo 2.40 *Probar que*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{xy} \quad \textit{no existe.}$$

En efecto : El camino $(x,0)$; $(0,x)$ *no se puede tomar, pues no pertenecen al dominio de la función, pero por el camino* (x,x)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{xy} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} 2 = 2$$

y por el camino $(x,2x)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{xy} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+(2x)^2}{x(2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{5x^2}{2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$$

por lo tanto

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{xy} \quad \textit{no existe.}$$

Ejemplo 2.41

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^3-y^3+z^3}{xyz} \quad \textit{no existe.}$$

En efecto : Hay que hallar 2 caminos diferentes en el dominio de la función, que pasen por $(0,0,0)$ *y que tenga límites diferentes, por ejemplo, por el camino* (x,x,x) *se tiene*

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^3-y^3+z^3}{xyz} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

y por el camino $(x,x,2x)$

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^3-y^3+z^3}{xyz} = \lim \frac{8x^3}{\underset{x\to 0}{2x^3}} = 4$$

por lo tanto

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^3-y^3+z^3}{xyz} \quad \textit{no existe.}$$

Ejemplo 2.42 *Probar que*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y} \quad \textit{no existe.}$$

En efecto: Tomemos los caminos $(x,0)$ *y* (x,x^3-x^2). *Así por por el camino* $(x,0)$ *se tiene*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2}=\lim_{x\to 0}0=0$$

y por el camino (x,x^3-x^2)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x^3-x^2)}{x^2+x^3-x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3(x-1)}{x^3}=\lim_{x\to 0}(x-1)=-1$$

por lo tanto

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y}\quad \textit{no existe.}$$

Ejemplo 2.43 *Probar que*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^3+y^3}\quad \textit{no existe.}$$

En efecto: Por el camino $(x,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^3+y^3}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x^3}=\lim_{x\to 0}0=0$$

y por el camino $\left(x,\sqrt[3]{x^4-x^3}\right)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^3+y^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sqrt[3]{\left(x^4-x^3\right)^2}}{x^3+x^4-x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2x^2\sqrt[3]{\left(x-1\right)^2}}{x^4}=\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{\left(x-1\right)^2}=1$$

por lo tanto

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^3+y^3}\quad \textit{no existe.}$$

Se observa que si se está calculando el

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$$

se buscan caminos de la forma

$$(x,x);\ (x,mx);(mx,x);(x,mx^2);(mx^2,x);(x^3,x);(x,x^3);(x,x^3-x^2);(x,\sin x)....$$

que estén en el dominio de la función y que pasen por el punto. Análogamente si se pretende calcular

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z)$$

se buscan los caminos de la forma

$$(x,0,0);(x,x,0);(0,x,0)...(x,x^2,0);(0,x^2,x)...(x,x^5-x,x^2)...$$

que estén en el dominio de la función y que pasen por el punto.

Ejemplo 2.44 *Mostrar que*

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2-y^2+z^2}{|x|^3+|y|+|z|} \quad \textit{no existe}$$

Por el camino $(x,0,0)$ *se tiene que*

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2-y^2+z^2}{|x|^3+|y|+|z|} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{|x|^3} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{|x|}$$

que no existe, luego si el límite no existe por un camino, se concluye que

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2-y^2+z^2}{|x|^3+|y|+|z|} \quad \textit{no existe}$$

Ejemplo 2.45 *Mostrar que*

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy^3+z}{x^2+y^6+z^2} \quad \textit{no existe.}$$

Por el camino $(x^3,x,0)$

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy^3+z}{x^2+y^6+z^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3x^3+0}{x^6+x^6+0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^6}{2x^6} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

y por el camino $(x,0,0)$

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy^3+z}{x^2+y^6+z^2} = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

y así

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy^3+z}{x^2+y^6+z^2} \quad \textit{no existe.}$$

Ejemplo 2.46 *Analizar si*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} \quad \textit{existe o no.}$$

En efecto: Primero escogemos por lo menos un camino, por ejemplo $(x,0)$ *y*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^2} = \lim_{x\to 0} x^2 = 0$$

Luego de aquí se puede concluir que si existe el límite es 0 y lo probamos:

$$0 \leq \left| \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} - 0 \right| = \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} = \frac{x^2x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2y^2}{x^2+y^2} \leq x^2+y^2$$

como

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2+y^2 = 0 \quad \textit{se concluye que} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} = 0$$

Ejemplo 2.47 *Analizar si*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} \quad \textit{existe o no}$$

En efecto: Por el camino $(x,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^2} = 0$$

luego si el límites existe es 0*; y lo probaremos:*

$$0 \leq \left| \frac{xy^2}{x^2+y^4} - 0 \right| = \frac{|x|\, y^2}{x^2+y^4}$$

pero observe que no es fácil hallar $h(x,y)$ *que sea mayor y que*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = 0,$$

entonces hay que tratar de buscar otro camino cuyo límite no sea cero, por ejemplo: (x^2,x)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2x^2}{x^4+x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{2x^4} = \lim_{x\to 0} 1/2 = 1/2$$

y así

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} \quad \textit{no existe}$$

Ejemplo 2.48 *Analizar si*

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2-y^2+z^4}{x^2+y^2-z^2} \quad \textit{existe o no}$$

En efecto: Por el camino $(x,0,0)$ *se tiene*

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2-y^2+z^4}{x^2+y^2-z^2} = \lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2} = 1$$

y por el camino $(x,x,0)$

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2-y^2+z^4}{x^2+y^2-z^2} = \lim_{x\to0}\frac{0}{2x^2} = \lim_{x\to0} 0 = 0$$

y así

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2-y^2+z^4}{x^2+y^2-z^2} \quad \textit{no existe}$$

Ejemplo 2.49 *Analizar si*

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^4+y^4-z^4} \quad \textit{existe}$$

En efecto: Por el camino $(x,0,0)$

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^4+y^4-z^4} = \lim_{x\to0}\frac{0}{x^4} = \lim_{x\to0} 0 = 0$$

por el camino (x,x,x)

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^4+y^4-z^4} = \lim_{x\to0}\frac{x^3}{3x^4} = \lim_{x\to0}\frac{1}{3x} \quad \textit{que no existe,}$$

luego

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^4+y^4-z^4} \quad \textit{no existe}$$

Ejemplo 2.50 *Analizar si*

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^3+y^3+z^3} \quad \textit{existe}$$

En efecto: Por el camino $(x,0,0)$

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^3+y^3+z^3} = \lim_{x\to0}\frac{0}{x^3} = 0$$

Por el camino (x,x,x)

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^3+y^3+z^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{3x^3} = \frac{1}{3}$$

luego

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^3+y^3+z^3} \quad \textit{no existe}$$

Ejemplo 2.51 *Analizar si*

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} (x^2+y^2+z^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\right) \quad \textit{existe}$$

En efecto: Por el camino $(x,0,0)$

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} (x^2+y^2+z^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\right) = \lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right); \quad t=\frac{1}{x^2}$$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{\sin t}{t} = 0$$

pues

$$-1 \le \sin t \le 1 \Rightarrow -\frac{1}{t} \le \frac{\sin t}{t} \le \frac{1}{t}$$

luego

$$0 \le \left|(x^2+y^2+z^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\right) - 0\right| = (x^2+y^2+z^2)\left|\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\right)\right| \le x^2+y^2+z^2$$

entonces

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} (x^2+y^2+z^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\right) = 0$$

Como conclución para demostrar que un límite no existe se toman caminos que pasen por el punto y que esten en el dominio de la función y si el valor del límite por dos caminos diferentes es distinto se concluye que el límite no existe, o si por un camino el limite no existe se concluye que el límite no existe. Si por varios caminos el límite es el mismo valor se concluye que si el limite existe este es el valor, pero puede ser que el limite no exista, entonces para solucionar esta insertidumbre hay que hacer la prueba.

Ejercicio 2 *Solucionar los ejercicios siguientes*

1. Probar que

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^4yz}{|x|^4+|y|^3+z^2} = 0$$

2. Probar que
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - x^2y + xy^2 - y^3}{x^2+y^2} = 0$$

3. Probar que
$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} = 0$$

4. Probar que
$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2} = 0$$

5. Probar que
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+|xy|+y^2} = 0$$

6. Probar que
$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\sin(xyz)}{x^2+y^2+|z|} = 0$$

7. Probar que
$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy+xz+yz}{x^2+y^2+z^2} \quad \text{no existe}$$

8. Probar que
$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^5-y^5+z^6}{x^5+y^5+z^2} \quad \text{no existe}$$

9. Probar que
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} \quad \text{no existe}$$

10. Probar que
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-y^3}{x-y} = 0$$

11. Probar que
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y} \quad \text{no existe}$$

12. Probar que
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = 0$$

13. Probar que

$$\lim_{(x,y)\to(8,8)} \frac{x+y-16}{\sqrt{x+y}-4} = 8$$

14. Probar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x - \sin y}{x-y} = 1$$

15. Probar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \ln\left(\frac{3x^2 - x^2y^2 + 3y^2}{x^2+y^2}\right) = \ln 3$$

16. Probar que

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2y^4 + z^2}{|x|^3 + |y|^3 + |z|} = 0$$

17. Probar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-y)^2 \sin(x+y)}{x^2-y^2} = 0$$

18. Probar que

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^3+y^3+z^3} \text{ no existe}$$

19. Probar que

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^4-y^4+z^4}{x^4+y^4+z^4} \text{ no existe}$$

20. Probar que

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2yz}{x^4+y^4+z^4} \text{ no existe}$$

21. Probar que

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^3-y^3-z^3}{x^2+y^2+z^2} = 0$$

2.4 Derivadas

En esta sección se trata el concepto de derivada, sus principales propiedades, el vector gradiente y sus propiedades y una variedad de ejemplos resueltos, al igual que una sección de ejercicios propuestos con sus respuestas respectivas.

Recordemos que una bola abierta con centro a y radio ϵ, se nota por $B(a;\epsilon)$ y está definida por el el conjunto

$$B(a;\epsilon) = \{x/\ \|x-a\| < \epsilon\}$$

Un conjunto A es abierto si y solo si todos sus puntos son interiores y un punto x es interior a A, si existe una bola abierta con centro x y radio $\epsilon > 0$ totalmente contenida en A, es decir, si existe $B(x;\epsilon)$ tal que $B(x;\epsilon) \subseteq A$. Por ejemplo en R,

$$B(1;3) = \{x/\ \|x-1\| < 3\} = \{x/-3 < x-1 < 3\} = \{x/-2 < x < 4\} = (-2,4)$$

luego en R los intervalos abiertos son las bolas abiertas. En R^2,

$$B((1,1);3) = \{(x,y)/\ \|(x,y)-(1,1)\| < 3\} = \{(x,y)/\ \|(x-1,y-1)\| < 3\} =$$

$$= \left\{(x,y)/\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} < 3\right\} = \left\{(x,y)/(x-1)^2+(y-1)^2 < 9\right\}$$

Una vecindad de un punto x, es cualquier conjunto, que contenga un conjunto abierto, que contenga al punto

2.4.1 Definición

Sea $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, una función definida en x y en una vecidad de x, entonces si existe

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+hu)-f(x)}{h}$$

se dice que f es derivable en x, en la dirección del vector u y en este caso este límite , se denota por $f'(x;u)$, es decir,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+hu)-f(x)}{h} = f'(x;u)$$

es la derivada de f en el punto x, en la dirección del vector u.

Si u es un vector unitario; $f'(x;u)$ se nota por $D_u f(x)$ y este límite si existe, es el que se define como la derivada direccional de f en el punto x, en la dirección de u, es decir,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+hu)-f(x)}{h} = D_u f(x) \quad \text{si } u \text{ es unitario}$$

Si $u = e_k$ (vector canónico) $f'(x;u) = f'(x;e_k)$ es la derivada parcial con respecto a la variable x_k y se denota por $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x)$; es decir;

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+he_k)-f(x)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \text{ si este límite existe}$$

Recordemos que si $u = 1$; entonces

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h.1)-f(x)}{h} = f'(x) \quad \text{si este límite existe}$$

es la derivada de la función $f(x)$ en una variable.

Ejemplo 2.52 *Si*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si \;\; x \neq 1 \\ 1 & si \; x = 1 \end{cases} \qquad entonces$$

a) Si $x = 1$ entonces

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1+2h+h^2-1}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{2h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0} 2+h = 2 \end{aligned}$$

luego $f'(1) = 2$

b) Si $x \neq 1$, entonces $f'(x) = 2x$, así

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Ejemplo 2.53

$$Sea \quad f(x) = \begin{cases} x+1 & si \; x \neq 0 \\ 2 & si \; x = 0 \end{cases} \qquad entonces$$

a) Si $x = 0$, se tiene

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h+1-2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h-1}{h} \quad no\ existe,\ así\ que\ f'(0) \quad no\ existe \end{aligned}$$

b) Si $x \neq 0$, entonces $f'(x) = 1$ entonces

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & si \;\; x \neq 0 \\ no\ existe & si \; x = 0 \end{cases}$$

De los dos ejemplos anteriores, se puede observar que para hallar la derivada de una función en un punto problema, (gráfico se corta por ejemplo) hay que aplicar la definición, pues la función allí está definida puntualmente y en los demás puntos se aplica todas las propiedades de las derivadas, en una forma análoga se calculan las derivadas de una función en varias variables. Se mostrarán unos ejemplos para ilustrar la derivada por medio de la definición

Ejemplo 2.54 *Sea*

$$f(x,y) = xy + 4; \quad \textit{hallar} \ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y); \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

a)

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \lim_{h\to 0}\frac{f((x,y)+h(1,0)) - f(x,y))}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)y + 4 - xy - 4}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{xy + hy + 4 - xy - 4}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{hy}{h} = \lim_{h\to 0} y = y \end{aligned}$$

luego

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y$$

b)

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \lim_{h\to 0}\frac{f((x,y)+h(0,1)) - f(x,y))}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{x(h+y) + 4 - xy - 4}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{xy + hx + 4 - xy - 4}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{hx}{h} = \lim_{h\to 0} x = x \end{aligned}$$

luego

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x$$

Ejemplo 2.55

$$\textit{Sea} \quad f(x,y,z) = xyz + x; \quad \textit{hallar} \ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z), \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)$$

a)

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= \lim_{h\to 0}\frac{f((x,y,z)+h(1,0,0))-f(x,y,z))}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y,z)-f(x,y,z)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)yz+x+h-xyz-x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{xyz+hyz+x+h-xyz-x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h(yz+1)}{h}=\lim_{h\to 0}yz+1=yz+1\end{aligned}$$

luego

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=yz+1$$

Observe que para derivar una función de varias variables con respecto a x, derivamos con respecto a x y mantenemos constantes las demás variables.

b)

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= \lim_{h\to 0}\frac{f((x,y,z)+h(0,1,0))-f(x,y,z))}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h,z)-f(x,y,z)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(y+h)xz+x-xyz-x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{xyz+xzh+x-xyz-x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{xzh}{h}=\lim_{h\to 0}xz=xz\end{aligned}$$

luego

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=xz$$

Para hallar la derivada parcial de $f(x,y,z)$ con respecto a y, derivamos con respecto a y y mantenemos a x y z como constantes.

c)

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= \lim_{h\to 0}\frac{f((x,y,z)+h(0,0,1))-f(x,y,z))}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x,y,z+h)-f(x,y,z)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(z+h)xy+x-xyz-x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{xyh}{h}=xy\end{aligned}$$

luego

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=xy$$

Para hallar la derivada parcial de $f(x,y,z)$ con respecto a z, derivamos con respecto a z y mantenemos a x y y como constantes

Ejemplo 2.56

$$Si \;\; f(x,y,z) = x^3 + y^3 + \sin(x^2y) + z \qquad entonces$$

a)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 3x^2 + 0 + [\cos(x^2y)]2xy + 0$$

aquí se ha aplicado la derivada de una suma de funciónes y la derivada de una compuesta

b)

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 0 + 3y^2 + [\cos(x^2y)]x^2 + 0$$

aquí se ha derivado $f(x,y,z)$ *con respecto a* y *y* x, z, *fueron consideradas constantes.*

c)

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0 + 0 + 0 + 1 = 1$$

aquí se ha derivado $f(x,y,z)$ *con respecto a* z *y* x, y, *fueron consideradas constantes.*

Ejemplo 2.57

$$Si \;\; f(x,y,z) = \sin^4(x^2 + y^2 + z^2) \quad entonces$$

a)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \left[4\sin^3(x^2+y^2+z^2)\cos(x^2+y^2+z^2)\right]2x$$

b)

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \left[4\sin^3(x^2+y^2+z^2)\cos(x^2+y^2+z^2)\right]2y$$

c)

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \left[4\sin^3(x^2+y^2+z^2)\cos(x^2+y^2+z^2)\right]2z$$

Con este ejemplo se ilustra la derivada de una función compuesta.

Ejemplo 2.58

$$Sea \;\; f(x,y,z) = e^{x^2y}\ln(x^2 + z^2 + y) \quad entonces$$

a)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2xye^{x^2y}\ln(x^2+z^2+y) + e^{x^2y}\frac{2x}{x^2+z^2+y}$$

luego $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)$ *es la derivada de un producto de 2 funciones*

b)

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \frac{2ze^{x^2y}}{x^2+z^2+y}$$

Ejemplo 2.59 *si*

$$f(x,y,z)=e^{x^2+y^2+z^2}\quad \textit{entonces}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=2xe^{x^2+y^2+z^2},\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=2ye^{x^2+y^2+z^2},\quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=2ze^{x^2+y^2+z^2}$$

Ejemplo 2.60 *Si*

$$f(x,y,z)=\left(x^2+y^2+z^2\right)^3\quad \textit{entonces}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=6x\left(x^2+y^2+z^2\right)^2,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=6y\left(x^2+y^2+z^2\right)^2$$

Ejemplo 2.61 *Sea*

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= x^y z+\log_z(xy)=e^{\ln x^y}z+\log_z(xy) \\ &= e^{y\ln x}z+\frac{\ln(xy)}{\ln z} \end{aligned}$$

a)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=\frac{y}{x}zx^y+\frac{1}{\ln z}\frac{1}{xy}y=\frac{y}{x}zx^y+\frac{1}{\ln z}\frac{1}{x}$$

b)

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=x^y+\frac{(\ln z)(0)-[\ln(xy)]\,\frac{1}{z}}{\ln^2 z}=x^y-\frac{\ln(xy)}{z\ln^2 z}$$

Ejemplo 2.62 *Si*

$$f(x,y,z)=\int_3^{x^2yz}\sqrt{1+t^4}dt\quad \textit{entonces}$$

a)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=\sqrt{1+(x^2yz)^4}2xyz$$

b)

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=\sqrt{1+(x^2yz)^4}x^2z$$

c)

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=\sqrt{1+(x^2yz)^4}x^2y$$

Recuerde que si

$$F(x)=\int_a^{g(x)}f(t)dt\quad \textit{entonces}\quad F'(x)=f(g(x))g'(x)$$

Ejemplo 2.63 *Si*

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int_x^y e^{t^2}dt = \int_x^a e^{t^2}dt + \int_a^y e^{t^2}dt \\ &= \int_a^y e^{t^2}dt - \int_a^x e^{t^2}dt \end{aligned}$$

entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -e^{x^2}; \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{y^2}$$

Ejemplo 2.64 *Sea*

$$f(x,y) = \begin{cases} xy & si\ (x,y) \neq (2,4) \\ 8 & si\ (x,y) = (2,4) \end{cases}$$

entonces

a)

$$Si \quad (x,y) \neq (2,4) \quad entonces \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y$$

b)

$$\begin{aligned} Si \quad (x,y) &= (2,4) \quad entonces \\ \frac{\partial f}{\partial x}(2,4) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h,4)-f(2,4)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(2+h)4-8}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{4h}{h} = 4 \end{aligned}$$

así

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} y & si\ (x,y) \neq (2,4) \\ 4 & si\ (x,y) = (2,4) \end{cases}$$

por lo tanto $\dfrac{\partial f}{\partial x}(3,5) = 5$; $\quad \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$; *En forma análoga*

a)

$$Si \quad (x,y) \neq (2,4) \quad entonces \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x$$

b)

$$\begin{aligned} Si \quad (x,y) &= (2,4) \quad entonces \\ \frac{\partial f}{\partial y}(2,4) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(2,4+h)-f(2,4)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(4+h)2-8}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{2h}{h} = 2 \end{aligned}$$

así

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases} x & si\ (x,y)\neq(2,4)\\ 2 & si\ (x,y)=(2,4)\end{cases}$$

Por lo tanto, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(3,5)=3;\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0;\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(2,0)=2$

Luego para calcular la derivada de una función como la anterior, se aplican las propiedades de las derivadas en los puntos no problema $((x,y)\neq(2,4))$ y en los puntos problema $(x,y)=(2,4)$ se aplica la definición.

Ejemplo 2.65 *Sea*

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & si\ \ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}\quad entonces$$

a) Si $(x,y)\neq(0,0)$ *entonces*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{(x^2+y^2)\,2xy^2-x^2y^2(2x)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2x^3y^2+2xy^4-2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

b) Si $(x,y)=(0,0)$ *entonces*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{0}{h^2}-0}{h}=\lim_{h\to 0}0=0,\quad así$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases} \dfrac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

En forma análoga verifique

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases} \dfrac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2} & si\ \ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Ejemplo 2.66 *Sea*

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)} & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Mostrar que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2} & si\ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & si\ (x,y)=(0,0) \end{cases}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{(x^2+y^2)^2} & si\ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & si\ (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Si $z = f(x,y,z)$, las notaciones más usuales para las derivadas parciales son:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = f_x(x,y,z) = D_1 f(x,y,z)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = f_y(x,y,z) = D_2 f(x,y,z)$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = f_z(x,y,z) = D_3 f(x,y,z)$$

2.4.2 Algunas propiedades de las derivadas

1. Si $f(x_1, x_2, \quad, x_n) = k$, entonces

$$D_k f(x_1, x_2, \quad, x_n) = 0$$

2. Si $f, g : R^n \to R$ entonces

$$D_k(f \pm g) = D_k(f) \pm D_k(g)$$

3. Si $f, g : R^n \to R$ entonces

$$D_k(fg) = fD_k(g) + gD_k(f)$$

4. Si $f, g : R^n \to R$ entonces

$$D_k\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gD_k(f) - fD_k(g)}{g^2}$$

2.4.3 Vector Gradiente

Cuando calculamos las derivadas parciales de una función $f(x,y,z)$ se tiene que podemos formar el vector

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\,,\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\,,\,\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\right)$$

llamado el **vector gradiente** de $f(x,y,z)$ y notado por $\nabla f(x,y,z)$, es decir,

$$\nabla f(x,y,z)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\,,\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\,,\,\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\right)$$

se llama el vector gradiente de $f(x,y,z)$ y goza de las mismas propiedades de las derivadas parciales:

1. $$\nabla(c)=0$$
2. $$\nabla(f\pm g)=\nabla f\pm\nabla g$$
3. $$\nabla(fg)=f\nabla g+g\nabla f$$
4. $$\nabla\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{g\nabla f-f\nabla g}{g^2}$$

Demostremos que

$$\nabla(fg)=f\nabla g+g\nabla f$$

y consideremos a $f(x,y);\ g(x,y)$ como funciones de 2 variables. Como

$$\begin{aligned}\nabla(f(x,y)g(x,y)) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}(fg)\,,\,\frac{\partial}{\partial y}(fg)\right)=\left(f\frac{\partial g}{\partial x}+g\frac{\partial f}{\partial x},\ \ f\frac{\partial g}{\partial y}+g\frac{\partial f}{\partial y}\right)\\ &= \left(f\frac{\partial g}{\partial x},\ f\frac{\partial g}{\partial y}\right)+\left(g\frac{\partial f}{\partial x},g\frac{\partial f}{\partial y}\right)=f\left(\frac{\partial g}{\partial x},\frac{\partial g}{\partial y}\right)\ +g\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)\\ &= f\nabla g+g\nabla f\end{aligned}$$

Ejemplo 2.67 *Si*

$$f(x,y)=x^2+y^2 \qquad \textit{entonces}$$

$$\nabla f(x,y)=(2x,2y)=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Ejemplo 2.68 *Si*

$$f(x,y,z)=4 \qquad entonces$$

$$\nabla f(x,y,z)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z),\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z),\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\right)=(0,0,0)$$

Ejemplo 2.69 *Si*

$$f(x,y,z)=y+z^2 \qquad entonces$$

$$\nabla f(x,y,z)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z),\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z),\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\right)=(0,1,2z)$$

Ejemplo 2.70 *Si*

$$f(x,y,z)=xe^x+x^2z+z\cos z \qquad entonces$$

$$\begin{aligned}\nabla f(x,y,z) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z),\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z),\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\right)=\\ &= \left(e^x+xe^x+2xz,0,x^2+\cos z-z\sin z\right)\end{aligned}$$

Ejemplo 2.71 *Si*

$$f(x,y,z)=xyz+7\sin 3 \ \ entonces$$

$$\nabla f(x,y,z)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z),\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z),\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\right)=(yz,xz,xy)$$

Ejemplo 2.72 *Si*

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2y^2+x & si\ (x,y)\neq(1,2)\\ 5 & si\ (x,y)=(1,2)\end{cases} \qquad entonces$$

a) Si $(x,y)\neq(1,2)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2xy^2+1$$

b) Si $(x,y)=(1,2)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h,2)-f(1,2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)^2 4+(1+h)-5}{h}=\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(1+2h+h^2)\,4+1+h-5}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{9h+4h^2}{h}=\lim_{h\to 0}9+4h=9\end{aligned}$$

luego

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 9$$

por tanto

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 2xy^2+1 & si \ \ (x,y) \neq (1,2) \\ 9 & si \ (x,y) = (1,2) \end{cases}$$

c) Si $(x,y) \neq (1,2)$, *entonces*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^2y$$

d) Si $(x,y) = (1,2)$ *entonces*

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(1,2+h)-f(1,2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1(2+h)^2+1-5}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{4+4h+h^2+1-5}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{4h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}4+h = 4 \end{aligned}$$

luego

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 4$$

así que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 2x^2y & si \ (x,y) \neq (1,2) \\ 4 & si \ (x,y) = (1,2) \end{cases}$$

Ahora

$$\nabla f(1,2) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,2), \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)\right) = (9,4), \quad \nabla f(1,1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,1), \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\right) = (3,2)$$

$$\nabla f(0,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) = (1,0)$$

Ejemplo 2.73 *Si*

$$f(x,y,z) = \ln^2(x^2+y+z^2) \quad entonces$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= 2\ln(x^2+y+z^2)\frac{2x}{x^2+y+z^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= 2\ln(x^2+y+z^2)\frac{1}{x^2+y+z^2} \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= 2\ln(x^2+y+z^2)\frac{2z}{x^2+y+z^2} \end{aligned}$$

así que

$$\begin{aligned}\nabla f(1,2,1) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,2,1), \frac{\partial f}{\partial y}(1,2,1), \frac{\partial f}{\partial z}(1,2,1)\right)\\ &= \left(\frac{4\ln(4)}{4}, \frac{2\ln(4)}{4}, \frac{4\ln(4)}{4}\right)\end{aligned}$$

Ejemplo 2.74 *Si*

$$\begin{aligned}f(x,y,z) &= x^z + y^x + \log_2 x\\ &= e^{\ln x^z} + e^{\ln y^x} + \frac{\ln x}{\ln 2} = e^{z\ln x} + e^{x\ln y} + \frac{\ln x}{\ln 2}\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= \frac{x^z z}{x} + y^x \ln y + \frac{1}{x\ln 2}\\ \frac{\partial f}{\partial x}(1,1,1) &= 1 + 0 + \frac{1}{\ln 2} = 1 + \frac{1}{\ln 2}\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= 0 + \frac{y^x x}{y} + 0 = \frac{y^x x}{y}; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1,1) = 1\\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= x^z \ln x + 0 + 0; \quad \frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1) = 0\end{aligned}$$

así

$$\nabla f(1,1,1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,1,1), \frac{\partial f}{\partial y}(1,1,1),\ \frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1)\right) = \left(1 + \frac{1}{\ln 2}, 1, 0\right)$$

Ejercicio 3 *Solucionar los ejercicios siguientes*

1. Si

$$f(x,y) = x^2y^2 + 4 \quad \text{entonces mostrar que}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} = 2xy^2 \quad \text{y} \quad \text{que} \ \lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h} = 2x^2y$$

2. Si

$$f(x,y) = \sqrt{x+y}, \quad \text{entonces verificar que}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} = \frac{1}{2\sqrt{x+y}} \quad \text{y que} \ \lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h} = \frac{1}{2\sqrt{x+y}}$$

3. Si

$$f(x,y)=\frac{2y}{y+\cos x} \quad \text{entonces verificar que } \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{2y\sin x}{(y+\cos x)^2}$$

por medio de las propiedades

4. Si

$$f(x,y,z)=\ln^2(x+y+z)-x^z+\log_2 xz-e^{xyz}$$

Mostrar que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=\frac{2\ln(x+y+z)}{x+y+z}-zx^{z-1}+\frac{1}{x\ln 2}-yze^{xyz}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=\frac{2\ln(x+y+z)}{x+y+z}-xze^{xyz}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=\frac{2\ln(x+y+z)}{x+y+z}-x^z\ln x+\frac{1}{z\ln 2}-xye^{xyz}$$

5. Si

$$f(x,y,z)=\int_3^{\int_2^{x^2\ln z} e^{(-t^2)}dt}\frac{dt}{1+t^4} \quad \text{mostrar que}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=\frac{1}{1+\left[\int_2^{x^2\ln z} e^{(-t^2)}dt\right]^4}e^{-\left(x^2\ln z\right)^2}2x\ln z$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=\frac{1}{1+\left[\int_2^{x^2\ln z} e^{(-t^2)}dt\right]^4}e^{-\left(x^2\ln z\right)^2}.0=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=\frac{1}{1+\left[\int_2^{x^2\ln z} e^{-t^2}dt\right]^4}e^{-\left(x^2\ln z\right)^2}\frac{x^2}{z}$$

6. Si

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{x-y+z}{x^2+y^2+z^2} & \text{si } (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases} \quad \text{mostrar que}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{-x^2+y^2+z^2+2xy-2xz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2} & \text{si } (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ \text{no existe} & \text{si } (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{-x^2+y^2-z^2-2xy-2yz}{(x^2+y^2+z^2)^2} & \text{si } (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ \text{no existe} & \text{si } (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{x^2+y^2-z^2-2xz+2yz}{(x^2+y^2+z^2)^2} & \text{si } (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ \text{no existe} & \text{si } (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$$

7. Si

$$f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\quad \text{mostrar que}$$

$$\nabla f(x,y,z)=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

8. Si

$$f(x,y,z)=\frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+1}\qquad \text{verificar que}$$

$$\nabla f(x,y,z)=\left(\frac{2x(1-y^2-z^2)}{(x^2+1)^2},\frac{2y}{x^2+1},\frac{2z}{x^2+1}\right)$$

9. Si

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}\qquad \text{mostrar que}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^4-x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

10. Si

$$f(x,y,z)=\int_3^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\sin t^2 dt\quad \text{mostrar que}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=\sin\left(x^2+y^2+z^2\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=\sin\left(x^2+y^2+z^2\right)\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

11. Si

$$\begin{aligned} h(x,y) &= \int_{f(x,y)}^{g(x,y)} \sin t^2 dt \text{ entonces verificar que} \\ \frac{\partial h}{\partial x}(x,y) &= \sin\left(g(x,y)\right)^2 \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\right) - \sin\left(f(x,y)\right)^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) \end{aligned}$$

12. Si

$$f(x,y,z) = x^{y^z} \text{ entonces verificar que } \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = y^z x^{y^z-1} \ , \ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = x^{y^z} y^z \ln x . \ln y$$

13. Si

$$f(x,y,z) = e^{z^2} \cos y^2 \sin x^2 \text{ entonces verificar que } \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2z\ e^{z^2} \cos y^2 \sin x^2$$

2.5 Interpretación Geométrica de la Derivada

En esta sección, se trata el concepto de la Interpretación Geométrica de la derivada y el plano tangente a una superficie en un punto. El significado geométrico de la derivada de una función $y = f(x)$ de una variable es la pendiente de la recta tangente a la gráfica. El vector trasladado

$$i + \frac{dy}{dx} j$$

que parte de un punto (x,y) en la curva es tangente a la curva

Cuando calculamos la derivada de $z = f(x,y)$ con respecto a x, $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)$, consideramos a y como constante, es decir, $y = b$, por tanto

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,b) - f(x,b)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

que representa la pendiente de la recta tangente a la curva de nivel $z = f(x,b)$ en el punto $(x,b,f(x,b))$, más aún la pendiente de la recta tangente a la curva de nivel $z = f(x,b)$ en el punto $(a,b,f(a,b))$, es

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}$$

y un vector tangente a la curva $z = f(x,b)$ en el punto $(a,b,f(a,b))$ es

$$v = i + k\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$$

y si interceptamos la superficie $z = f(x, y)$ con el plano $x = a$, obtenemos la curva $z = f(a, y)$, por tanto

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a, y+h) - f(a, y)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{g(y+h) - g(y)}{h}$$

que representa la pendiente de la recta tangente a la curva de nivel $z = f(a, y)$ en el punto $(a, y, f(a, y))$, por tanto

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a, b+h) - f(a, b)}{h}$$

representa la pendiente de la recta tangente a la curva de nivel $z = f(a, y)$ en el punto $(a, b, f(a, b))$.

Un vector tangente a la curva $z = f(a, y)$ en el punto $(a, b, f(a, b))$ es

$$u = j + k\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$$

y un vector normal a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $(a, b, f(a, b))$ es

$$n = u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b), -1 \right)$$

por tanto la ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $(a, b, f(a, b))$ es

$$(X - P) \bullet n = 0 = ((x, y, z) - (a, b, f(a, b))) \bullet \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b), -1 \right) = 0, es\ decir,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\,(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) - (z - f(a, b)) = 0$$

por lo tanto

$$z - f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\,(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$$

es la ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $(a, b, f(a, b))$

Ejemplo 2.75 *Si*

$$z = f(x, y) = 9 - x^2 - y^2;$$

entonces para $x = 1$, *la curva de nivel es*

$$z = 9 - 1 - y^2 = 8 - y^2$$

luego

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y$$

y así la pendiente de la recta tangente a la curva $z = 8 - y^2$ *en el punto* $(1, 2, 4)$ *es* -4 *y la ecuación de esta recta es*

$$z - 4 = -4(y - 2) \quad \textit{en} \quad x = 1$$

Para $y = 2$, *la curva de nivel es*

$$z = 9 - 4 - x^2 = 5 - x^2 \quad \textit{y así} \ \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = -2x$$

y la pendiente de la recta tangente a $z = 5 - x^2$ *en* $(2, 2, 1)$ *(punto de la superficie) es* -4 *y así la recta tangente es* $z - 2 = -4(x - 2)$ *en* $y = 2$

Ejemplo 2.76 *El plano* $x = 3$ *interseca al paraboloide hiperbólico*

$$z = x^2 - y^2$$

en una parábola, hallar la pendiente de la recta tangente a la parábola en el punto $(3, 2, 5)$.

En efecto la pendiente es el valor de la derivada parcial $\frac{\partial z}{\partial y}$ *en el punto* $(3, 2, 5)$, *entonces*

$$m = \frac{\partial z}{\partial y} = -2y = -4$$

y así la pendiente vale -4

Ejemplo 2.77 *El plano* $y = 2$ *interseca a la superficie*

$$z = x^2 + y + \cos x + 1$$

en una curva, su pendiente de la recta tangente en $(1, 0, 3)$ *(punto de la superficie) es*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - \sin x \quad \textit{entonces} \quad \frac{\partial z}{\partial x}(1, 0, 3) = 2 - \sin 1$$

luego la pendiente es $2 - \sin 1$

Recordemos que el área de un paralelogramo de lados a,b es

$$\begin{aligned} A &= ab\sin\theta, \quad \text{donde} \quad \theta: \text{ ángulo entre a y b, luego} \\ \frac{\partial A}{\partial a} &= b\sin\theta; \quad \frac{\partial A}{\partial b} = a\sin\theta; \quad \frac{\partial A}{\partial \theta} = ab\cos\theta \end{aligned}$$

son llamados también razones de cambio del área con respecto a a, b, θ.

El volúmen de un paralelepípedo de lados x, y, z es $V = xyz$ entonces

$$\frac{\partial V}{\partial x} = yz; \quad \frac{\partial V}{\partial y} = xz; \quad \frac{\partial V}{\partial z} = xy$$

son las razones de cambio del volúmen respecto a sus lados x, y, z

2.6 Derivadas de orden superior

En esta sección, se explica como hallar las derivadas de orden superior de una función y se presenta una variedad de ejemplos resueltos, al igual que una sección de ejercicios propuestos con sus debidas respuestas

Si $f(x, y)$ es una función de dos variables, entonces sus derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

son también funciones de dos variables, de modo que podemos considerar sus derivadas parciales

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y); \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y); \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y); \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \end{aligned}$$

las cuales se llaman segundas derivadas parciales de $f(x, y)$; luego lo mismo que sucede con las derivadas ordinarias, es posible encontrar derivadas parciales de una función de varias variables de órdenes segundo, tercero o más, como se ilustrará en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 2.78 *Si*

$$f(x, y) = e^{x+y} + 5x + y \qquad \textit{entonces}$$

a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^{x+y} + 5x + 0 = e^{x+y} + 5,$ *b)* $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = e^{x+y} + 0 + 1 = e^{x+y} + 1$

$$c)\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{x+y}+5\right) = e^{x+y}$$

$$d)\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{x+y}+1\right) = e^{x+y}$$

$$f)\quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{x+y}\right) = e^{x+y}$$

$$g)\quad \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{x+y}\right) = e^{x+y}$$

$$h)\quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{x+y}\right) = e^{x+y}$$

$$i)\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^5 f}{\partial y^5}(x,y)\right) = \frac{\partial^6 f}{\partial x\partial y^5}(x,y) = e^{x+y}$$

Ejemplo 2.79

Si $f(x,y,z) = x^4y + zx + \cos x$ *entonces*

$$a)\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 4x^3y+z-\sin x \qquad b)\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(4x^3y+z-\sin x\right) = 4x^3$$

$$c)\quad \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial x}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y,z)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(4x^3\right) = 12x^2$$

$$d)\quad \frac{\partial^4 f}{\partial y\partial x\partial y\partial x}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial x}(x,y,z)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(12x^2\right) = 0$$

$$e)\quad \frac{\partial^3 f}{\partial z\partial y\partial x}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y,z)\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(4x^3\right) = 0$$

$$f)\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(4x^3y+z-\sin x\right) = 12x^2y-\cos x$$

$$g)\quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(12x^2y-\cos x\right) = 24xy+\sin x$$

Ejemplo 2.80

Si $f(x,y,z) = ye^x + \ln(zx) + y$ *entonces*

$$a)\quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{zx}x = \frac{1}{z} \qquad b)\frac{\partial f}{\partial x} = ye^x + \frac{z}{zx} = ye^x + \frac{1}{x} \qquad c)\quad \frac{\partial f}{\partial y} = e^x + 1$$

$d)\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = ye^x - \dfrac{1}{x^2} \quad e)\ \dfrac{\partial^3 f}{\partial z \partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(ye^x - \dfrac{1}{x^2}\right) = 0$

$f)\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(e^x + 1\right) = e^x$

$g)\ \dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}(0) = 0$

Recordemos que:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f''(x) = (f'(x))' = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

$$f'''(x) = \left(f''(x)\right)' = \lim_{h\to 0} \frac{f''(x+h) - f''(x)}{h} \qquad \text{y que}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} \text{ entonces}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x+h,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{h}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y+h) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}{h}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x+h,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}{h}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y+h) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{h}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\right) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z+h) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)}{h}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z \partial x}(x,y,z)\right) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y+h,z) - \frac{\partial f}{\partial z \partial x}(x,y,z)}{h}$$

Ejemplo 2.81 *Si*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

entonces hallar

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0); \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0);$$

Solución:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(0+h,0) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h}$$

pero

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(h,0) &= \lim_{k\to 0} \frac{f(h,k)-f(h,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{\dfrac{hk(h^2-k^2)}{h^2+k^2} - 0}{k} \\ &= \lim_{k\to 0} \frac{hk(h^2-k^2)}{k(h^2+k^2)} = \lim_{k\to 0} \frac{h(h^2-k^2)}{(h^2+k^2)} = \frac{h^3}{h^2} = h \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0 \end{aligned}$$

entonces

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(0+h,0) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1$$

así

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$$

En forma análoga verificar que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$$

Proposición 1 *Si*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y); \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y); \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y); \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$$

son continuas en una región D, entonces para cada $(x,y) \in D$ *se tiene que*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$$

Ejemplo 2.82

$$\text{Si} \quad f(x,y) = x^2y + x^4$$

entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2xy + 4x^3; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 \\
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(2xy + 4x^3\right) = 2x; \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\right) = 2x
\end{aligned}$$

entonces

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \ , \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

ya que las derivadas

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}; \ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad y \quad \frac{\partial f}{\partial x}; \ \frac{\partial f}{\partial y}$$

son todas continuas en $\mathbb{R}^2$

Ejemplo 2.83

$$Si \ \ f(x,y) = \sin(x+y) \quad entonces$$

a)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(x+y), \ \frac{\partial f}{\partial y} = \cos(x+y), \ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -\sin(x+y), \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\sin(x+y)$$

entonces

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Ejemplo 2.84

$$Si \ \ \mu(x,y) = e^x \sin(y) \quad entonces$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = e^x \sin y, \ \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} = e^x \sin y, \ \frac{\partial \mu}{\partial y} = e^x \cos y, \ \frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2} = -e^x \sin y$$

entonces

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2} = e^x \sin y - e^x \sin y = 0$$

y en este caso la función u se llama ***armónica,*** *pues satisface la ecuación de Laplace*

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2} = 0$$

Ejemplo 2.85

Si $f(x,y) = x^3+x^2y^3-2y^2$ *mostrar que*

$$a)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + 2xy^3 \qquad b)\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x^2y^2 - 4y \qquad c)\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x + 2y^3$$

$$d)\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 6xy^2 = f_{xy}(x,y) \quad e)\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 6xy^2$$

$$g)\ \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y) = 6x^2 \qquad h)\ \frac{\partial^4 f(x,y)}{\partial x \partial y^3} = 12x$$

Ejercicio 4

1. Considerar la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   Mostrar que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0$$

2. Si

$$f(x,y,z) = \ln(x + 2y^2 + 3z^3)$$

   Mostrar que

$$\frac{\partial^3 f(x,y,z)}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{72yz^2}{(x + 2y^2 + 3z^3)^3}$$

3. Mostrar que las funciones:

$$a) f(x,y,z) = x^2+y^2-2z^2 \quad b)\ f(x,y,z) = e^{3x+4y}\cos(5z) \quad c)\ f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

   Satisfacen la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

4. Si
$$f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$$
Mostrar que
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

5. Si
$$f(x,y,z) = xe^y \sin(\pi z)$$
mostrar que:
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z),\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z),\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z)$$

6. Si
$$f(x,y) = \sin x \sin^2 y$$
Mostrar que
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \cos x \sin 2y = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$$

7. Dar un ejemplo donde se cumpla que
$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial x \partial y}$$

8. Si
$$f(x,y,z) = \int_2^{xyz} (1+\sin^2 t)dt$$
Mostrar que
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\left(1 + (\sin^2(xyz))\,(xz)\right)$$

2.7 Derivada Direccional

En esta sección, se explica el concepto de derivada direccional de una función y se presenta una variedad de ejemplos resueltos, al igual que una sección de ejercicios propuestos con sus debidas respuestas

Ya conocemos la razón de cambio de una función f en el punto x, y en la dirección de los vectores i, j, ahora pretendemos hallar la razón de cambio de f en x y en la dirección de cualquier vector unitario u y para ello recordemos que:
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+hu)-f(x)}{h} = D_u f(x) \text{ si este límite existe}$$

y para demostrar que la derivada direccional existen en x, en la dirección u, hay que mostrar que la derivada existe en todas las direcciones; como se ilustra con los ejemplos siguientes:

Ejemplo 2.86 *Sea*

$$f(x,y) = |xy|\,, \quad \textit{hallar} \quad D_u f(0,0)$$

En efecto:

$$\begin{aligned} D_u f(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0)+h(a,b)) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(ha,hb) - f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(ha,hb)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|hahb|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|^2\,|ab|}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} |h|\,|ab| = 0 \end{aligned}$$

cualquier sea la dirección. Luego $D_u f(0,0)$ *existe y es* 0; *se ha tomado el vector* $u = (a,b) = (\cos\theta, \sin\theta)$

Ejemplo 2.87 *Si*

$$f(x,y) = \sqrt{|xy|}, \quad \textit{hallar} \quad D_u f(0,0)$$

En efecto:

$$\begin{aligned} D_u f(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(ha,hb) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(ha,hb)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{|ha,hb|}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}\sqrt{|ab|} = \lim_{h\to 0} \pm\sqrt{|ab|} \\ &= \begin{cases} 0 & \textit{si } (a,b) = (\pm 1, 0) \\ 0 & \textit{si } (a,b) = (0, \pm 1) \\ \textit{no existe en otra dirección} & \end{cases} \end{aligned}$$

Luego la derivada direccional en $(0,0)$ *no existe, solo existe en 4 direcciones.*
En este ejemplo se observa que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

Es decir el hecho de existan las derivadas parciales, no implica que la derivada direccional exista.

Ejemplo 2.88 *Si*

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}, \quad hallar \quad D_uf(0,0)$$

En efecto:

$$\begin{aligned} D_uf(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(ha,hb)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(ha,hb)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{(ha)^2+(hb)^2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}\sqrt{a^2+b^2}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h} \end{aligned}$$

que no existe, luego $D_uf(0,0)$ *no existe. (En ninguna dirección)*

Ejemplo 2.89 *Si*

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & si \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & si \quad (x,y)=(0,0) \end{cases} \qquad hallar \;\; D_uf(0,0)$$

En efecto:

$$\begin{aligned} D_uf(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(ha,hb)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(ha,hb)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{hahb}{h\left[(ha)^2+(hb)^2\right]}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2ab}{h^3\left(a^2+b^2\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{ab}{h} \\ &= \begin{cases} 0 \;\; si(a,b)=(\pm 1,0) \\ 0 \;\; si\;(a,b)=(0,\pm 1) \\ no\ existe\ en\ otra\ dirección \end{cases} \end{aligned}$$

Luego $D_uf(0,0)$ *no existe, solo existe en 4 direcciones.*

Ejemplo 2.90

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & si\ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & si\ (x,y)=(0,0) \end{cases} \qquad hallar \;\; D_uf(0,0)$$

En efecto:

$$\begin{aligned} D_uf(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(ha,hb)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(ha,hb)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{hah^2b^2}{h\left[h^2a^2+h^4b^4\right]}=\lim_{h\to 0}\frac{h^3ab^2}{h^3\left(a^2+h^2b^2\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{ab^2}{a^2+h^2b^4} \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} 0 & si\ (a,b) = (\pm 1, 0) \\ 0 & si\ (a,b) = (0, \pm 1) \\ \dfrac{ab^2}{a^2} = \dfrac{b^2}{a} & en\ las\ otras\ direcciónes \end{cases}$$

Luego $D_u f(0,0)$ *existe, pues existe en todas las direcciones*

2.7.1 Algunas propiedades:

Sean f y g :$\mathrm{R}^n \to R$ entonces

1. $$D_u(f \pm g) = D_u f \pm D_u g$$

2. $$D_u(\alpha f) = \alpha(D_u f)$$

3. $$D_u f = -D_u f$$

2.8 Diferenciales

En esta sección, se explica el concepto de la diferencial, sus propiedades y sus aplicaciones, como se halla la derivada direccional de una función en forma general, si la funcion es diferenciable y se presenta una variedad de ejemplos resueltos, al igual que una sección de ejercicios propuestos con sus debidas respuestas

Recordemos que si $y = f(x)$, entonces el cambio en el valor de $f(x)$ entre a y $a + \Delta x$ es

$$\Delta y = \Delta f = f(a + \Delta x) - f(a) \text{ y que } \Delta f \simeq dy = f'(x)dx$$

ya que

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = f'(a)$$

por tanto

$$\frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \simeq f'(a), \text{ asi, } \Delta f = f(a + \Delta x) - f(a) \simeq f'(a)\Delta x = \Delta y$$

La ecuación de la recta tangente a $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a)$, es

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

por tanto $y - f(a) = dy$ es el cambio en la altura de la recta tangente a $y = f(x)$ para $x = a$ y así para hallar la diferencial de una función $z = f(x, y)$, usamos una terminología similar a las de las funciones de una variable y llamamos $\Delta x, \Delta y$ a los incrementos de x y de y, y para hallar una aproximación de el incremento de z, para el cambio en el valor de $f(x, y)$, entre (a, b) y $(a + \Delta x, b + \Delta y)$

$$\Delta z = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b)$$

consideramos la ecuación del plano tangente a la superficie en el punto $(a, b, f(a, b))$ que sabemos que es

$$z - f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\,(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$$

y que por tanto la diferencial de $z = f(x, y)$ en el punto (a, b) se define como el cambio en la altura del plano tangente de (a, b) a $(a + \Delta x, b + \Delta y)$ y esto no es más que el valor de $z - f(a, b)$ entonces

$$dz = df(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y = \frac{\partial z}{\partial x}(a, b)dx + \frac{\partial z}{\partial y}(a, b)dy.$$

Ejemplo 2.91 *Si*

$$z = x^2 + y^2 \quad \textit{entonces} \quad dz = 2xdx + 2ydy = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Ejemplo 2.92 *Si*

$$\begin{aligned} z &= e^{x+y}\sin(xy) \quad \textit{entonces } dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \\ &= \left[e^{x+y}\sin(xy) + e^{x+y}y\cos(xy)\right]dx + \left[e^{x+y}\sin(xy) + e^{x+y}x\cos(xy)\right]dy \end{aligned}$$

Ejemplo 2.93 *si*

$$z = xy \ \textit{entonces } dz = \frac{\partial z}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial z}{\partial y}(x, y)dy = ydx + xdy$$

Ahora que comprendemos el concepto de lo que es la diferencial se hará un tratado más riguroso

U na función $f : \mathbb{R}^n \to R$, se dice que f es diferenciable en x, si existe una función lineal $T : \mathbb{R}^n \to R$ tal que

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(x + h) - f(x) - T(h)|}{\|h\|} = 0$$

y en tal caso $T(h) = df(x)h$.

La anterior definición es equivalente a: f es diferenciable es x si solo si:

1. $f(x+h) = f(x) + T(h) + r(h)$

2. T es lineal.

3. $\lim_{h\to 0} \frac{\|r(h)\|}{h} = 0,$

En efecto: Ya que $f(x+h) - f(x) - T(h) = r(h)$ tomamos la norma en ambos lados de la igualdad y dividiendo por $\|h\|$ se obtiene:

$$\frac{|f(x+h) - f(x) - T(h)|}{\|h\|} = \frac{\|r(h)\|}{\|h\|}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - T(h)|}{\|h\|} &= \lim_{h\to 0} \frac{\|r(h)\|}{\|h\|} = 0 \quad \text{entonces} \\ \lim_{h\to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - T(h)\|}{\|h\|} &= 0, \quad \text{con } T \quad \text{lineal.} \end{aligned}$$

luego esta definición implica la primera

Ejemplo 2.94 *Demostrar que $f(x,y) = xy$ es diferenciable en (x,y).*

En efecto: Hay que demostrar que

$$f(x+h) = f(x) + T(h) + r(h) \quad \textit{con } T \quad \textit{lineal} \quad \textit{y} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\|r(h)\|}{\|h\|} = 0$$

Pero

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f\left((x,y) + (h_1,h_2)\right) = f\left(x+h_1, y+h_2\right) = \left(x+h_1\right)\left(y+h_2\right) \\ &= xy + xh_2 + yh_1 + h_1h_2 = f(x,y) + T(h) + r(h) \end{aligned}$$

por lo tanto la diferencial es la parte lineal en h_1 y h_2, es decir,

$$T(h) = T(h_1,h_2) = yh_1 + xh_2 \textit{ es una transformación lineal en } h_1, h_2$$

$$\textit{y } r(h) = r(h_1,h_2) = h_1h_2 \textit{ la parte no lineal y mostremos que } \lim_{h\to 0} \frac{\|r(h)\|}{\|h\|} = 0;$$

$$\textit{es decir, } \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0$$

Para ello, por el camino $(h_1, 0)$ *se tiene*

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{0}{\sqrt{h_1^2}} = 0, \text{ por lo tanto si } \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

existe, es 0, *luego*

$$0 \leq \left| \frac{h_1h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} - 0 \right| = \frac{|h_1|\,|h_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \frac{\sqrt{h_1^2}\,|h_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \leq |h_2|$$

entonces

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0, \text{ por lo tanto}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|r(h)\|}{\|h\|} = 0$$

y así f *es diferenciable en* (x, y) *y*

$$df = T(h) = yh_1 + xh_2 = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)h_2 = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy$$

Si lo hacemos aplicando la primera definición, entonces suponemos que f es diferenciable en (x, y), y que la diferencial es

$$df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy = yh_1 + xh_2$$

y probaremos que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - T(h)\|}{\|h\|} = 0$$

En efecto:

$$f(x+h)-f(x)-T(h) = f\left((x,y)+(h_1,h_2)\right) - f(x,y) - T(h_1,h_2) =$$

$$= f\left(x+h_1, y+h_2\right) - f(x,y) - T(h_1,h_2) = \left(x+h_1\right)\left(y+h_2\right) - xy - yh_1 - xh_2$$

$$= xy + xh_2 + yh_1 + h_1h_2 - -xy - yh_1 - xh_2 = h_1h_2$$

por tanto

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - T(h)\|}{\|h\|} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|h_1h_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0 \ (ejercicio)$$

por tanto f es diferenciable en (x, y) y su diferencial es

$$df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy = yh_1 + xh_2$$

Ejemplo 2.95 *Demostrar que*

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x+y)\,|x|\,\sqrt{|y|}}{|x|+|y|} & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

es diferenciable en $(0,0)$*. En efecto:*

$$\begin{aligned} f(0+h) &= f\left((0,0)+(h_1,h_2)\right)=f(h_1,h_2)=\frac{(h_1+h_2)\,|h_1|\,\sqrt{|h_2|}}{|h_1|+|h_2|}\\ &= 0+0+\frac{(h_1+h_2)\,|h_1|\,\sqrt{|h_2|}}{|h_1|+|h_2|}=f(0,0)+T(h)+r(h)\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} f(0,0) &= 0;\quad T(h)=0,\quad \text{que es una transformación lineal}\\ & \quad\ \text{es la diferencial y}\end{aligned}$$

$$r(h_1,h_2)=\frac{(h_1+h_2)\,|h_1|\,\sqrt{|h_2|}}{|h_1|+|h_2|}\quad \text{es la parte no lineal y probemos que}$$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{\|r(h)\|}{\|h\|}=0,\ \text{mostrando que}\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{(h_1+h_2)\,|h_1|\,\sqrt{|h_2|}}{(|h_1|+|h_2|)\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=0$$

En efecto: Por el camino $(h_1,0)$ *se tiene que*

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{(h_1+h_2)\,|h_1|\,\sqrt{|h_2|}}{(|h_1|+|h_2|)\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=\lim_{(h_1)\to0}\frac{0}{|h_1|\sqrt{h_1^2}}=0$$

por tanto, si el límite existe es 0*, ahora*

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left|\frac{(h_1+h_2)\,|h_1|\,\sqrt{|h_2|}}{(|h_1|+|h_2|)\sqrt{h_1^2+h_2^2}}-0\right|=\frac{|h_1+h_2|\,|h_1|\,\sqrt{|h_2|}}{|h_1|+|h_2|\,\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\leq\frac{(|h_1|+|h_2|)\,|h_1|\,\sqrt{|h_2|}}{|h_1|+|h_2|\,\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\\ &= \frac{|h_1|\,\sqrt{|h_2|}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=\frac{\sqrt{h_1^2}\sqrt{|h_2|}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\leq\sqrt{|h_2|},\quad \text{luego}\\ 0 &\leq \left|\frac{(h_1+h_2)\,|h_1|\,\sqrt{|h_2|}}{(|h_1|+|h_2|)\sqrt{h_1^2+h_2^2}}-0\right|\leq\sqrt{|h_2|}\quad \text{por tanto}\end{aligned}$$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{(h_1+h_2)\,|h_1|\,\sqrt{|h_2|}}{(|h_1|+|h_2|)\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=0$$

y así f es diferenciable en $(0,0)$ y

$$df(0,0) = T(h) = 0 = 0h_1 + 0h_2 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)h_2 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)dy$$

Si lo hacemos aplicando la primera definición, entonces suponemos que f es diferenciable en $(0,0)$, y que la diferencial es

$$df(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)dy = 0h_1 + 0h_2 = 0$$

y probaremos que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(0+h) - f(0) - T(h)\|}{\|h\|} = 0$$

En efecto:

$$f(0+h) - f(0) - T(h) = f\left((0,0) + (h_1,h_2)\right) - f(0,0) - T(h_1,h_2) =$$

$$= f(h_1,h_2) - f(0,0) - T(h_1,h_2) =$$

$$= \frac{(h_1+h_2)\,|h_1|\,\sqrt{|h_2|} - 0 - 0}{(|h_1| + |h_2|)} \quad = \frac{(h_1+h_2)\,|h_1|\,\sqrt{|h_2|}}{(|h_1| + |h_2|)}$$

por tanto

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(0+h) - f(0) - T(h)\|}{\|h\|} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\left\|(h_1+h_2)\,|h_1|\,\sqrt{|h_2|}\right\|}{(|h_1| + |h_2|)\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0 \ \ (ejercicio)$$

luego f es diferenciable en $(0,0)$ y su diferencial es

$$df(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)dy = 0h_1 + 0h_2 = 0$$

Ejemplo 2.96 *Demostrar que*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad no\ es\ diferenciable\ en\ (0,0)$$

Supongamos que f es diferenciable en $(0,0)$, entonces

$$df(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)dy = 0dx + 0dy = 0$$

y así, si existe la diferencial en $(0,0)$ *es* 0*, luego hay que demostrar que*

$$\lim_{h\to 0}\frac{|f(0+h)-f(0)-0|}{\|h\|}=0$$

Como

$$f(0+h)-f(0)-0=f\left(h_1,h_2\right)=\frac{h_1h_2}{h_1^2+h_2^2}$$

Entonces hay que demostar que

$$\lim_{h\to 0}\frac{|f(h)|}{\|h\|}=\lim_{(h_1h_2)\to(0,0)}\frac{h_1h_2}{\left(h_1^2+h_2^2\right)\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=0$$

pero si tomamos el camino $(h,0)$ *entonces*

$$\lim_{(h_1h_2)\to(0,0)}\frac{h_1h_2}{\left(h_1^2+h_2^2\right)\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=\lim_{h_1\to 0}\frac{0}{h_1^2\sqrt{h_1^2}}=0$$

y por el camino (h_1,h_1)

$$\lim_{(h_1h_2)\to(0,0)}\frac{h_1h_2}{\left(h_1^2+h_2^2\right)\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=\lim_{h_1\to 0}\frac{h_1^2}{2h_1^2\sqrt{2h_1^2}}=\lim_{h_1\to 0}\frac{1}{2\sqrt{2h_1^2}}=\lim_{h_1\to 0}\frac{1}{2\left|h_1\right|\sqrt{2}}\quad \textit{no existe}$$

por lo tanto

$$\lim_{(h_1h_2)\to(0,0)}\frac{h_1h_2}{\left(h_1^2+h_2^2\right)\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\quad \textit{no existe, luego } f \textit{ no es diferenciable en } (0,0)$$

2.8.1 Algunas propiedades de la diferencial

Propiedad 1

Si f es una función diferenciable en $x=a$ entonces f tiene derivadas parciales en $x=a$ y en tal caso

$$\begin{aligned} df(a) &= \nabla f(a).h=\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)h_2+...+\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)h_n \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)dx_2+...+\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)dx_n \end{aligned}$$

Esta propiedad se aplica para demostrar que una función no es diferenciable en a, pués dice que si alguna derivada parcial en a no existe, se concluye que f no es diferenciable en a

Ejemplo 2.97 *Consideremos la función*

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{x^2+y^2} & si\ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & si\ (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

y calculemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^2}{h^2}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ \textit{que no existe}$$

por lo tanto f no es diferenciable en $(0,0)$. *f es difernciable en todos los demás puntos*

Ejemplo 2.98 *Consideremos la función*

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{y}{x+y} & si\ x\neq -y \\ 0 & si\ x=-y \end{cases}$$

y calculemos

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h}{h}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ \textit{que no existe}$$

por lo tanto f no es diferenciable en $(0,0)$. *f es difernciable en todos puntos donde* $x\neq -y$

Ejemplo 2.99

Ya sabemos que la función $f(x,y)=xy$ *es diferenciable en cualquier punto* (a,b),

luego f tiene derivadas parciales en (a,b) y

$$df(a,b)=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)dx+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)dy=bdx+ady$$

Propiedad 2

Toda función diferenciable en a, es continua en a. Esta propiedad es de gran utilidad para demostrar que una función no es diferenciable en a, pues también es equivalente a que si una función no es continua en a entonces no es diferenciable en a.

Ejemplo 2.100 $f(x,y)=xy$ *es una función diferenciable en cualquier punto* (x,y), *por lo tanto* $f(x,y)=xy$, *es continua en cualquie punto* (x,y)

Ejemplo 2.101 *La función*

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

no es continua en $(0,0)$, *pues el camino* $(x,0)$;

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2}=\lim_{x\to 0}0=0$$

y por el camino (x,x)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

por lo tanto $f(x,y)$ *no es diferenciable en* $(0,0)$,*ya que* $f(x,y)$ *no es continua en* $(0,0)$.

Ejemplo 2.102 *La función*

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y}{x+y} & si\ x\neq -y\\ 0 & si\ x=-y\end{cases}$$

no es continua en $(0,0)$, *pues el camino* $(x,0)$;

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y}{x+y}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x}=\lim_{x\to 0}0=0$$

y por el camino (x,x)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y}{x+y}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

por lo tanto $f(x,y)$ *no es diferenciable en* $(0,0)$,*ya que* $f(x,y)$ *no es continua en* $(0,0)$.

Ejemplo 2.103 *La función*

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{x^2+y^2} & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

no es continua en $(0,0)$, *pues el camino* $(x,0)$;

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}=\lim_{x\to 0}1=1$$

y por el camino (x,x)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

por lo tanto $f(x,y)$ *no es diferenciable en* $(0,0)$, *ya que* $f(x,y)$ *no es continua en* $(0,0)$.

Propiedad 3

Si existen las derivadas parciales en a, en una vecindad de a y son continuas en a entonces f es diferenciable en a y $df(a) = \nabla f(a).h$

Ejemplo 2.104

$$f(x,y,z) = xyz$$

tiene derivadas parciales en cualquier punto (x,y,z),*en una vecindad de* (x,y,z) *y además son continuas* (x,y,z), *luego* f (x,y,z) *es diferenciable en* (x,y,z) *y*

$$\begin{aligned} df(x,y,z) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)dz \\ &= yzdx + xzdy + xydz \end{aligned}$$

Ejemplo 2.105

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad es\ diferenciable\ en\ \ (0,0)$$

En efecto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \begin{cases} \dfrac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad \text{y} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \begin{cases} \dfrac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{aligned}$$

además

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \quad \text{ya que} \\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} = 0 \end{aligned}$$

pues

$$0 \leq \left| \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} - 0 \right| = \frac{2\,|x|\,y^2.y^2}{(x^2+y^2)^2} \leq 2\,|x|$$

$$\text{entonces } \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

y como

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

se concluye que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ es continua en $(0,0)$.

En forma análoga demustre que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, es decir que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ existe $(0,0)$, en una vecindad de $(0,0)$ y es continua en $(0,0)$. Entonces existen las derivadas parciales en $(0,0)$, en una vecindad de $(0,0)$ y son continuas en $(0,0)$ por lo tanto se concluye que f es diferenciable en $(0,0)$ y

$$df(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)dy = 0$$

En forma análoga se demuestra que $f(x,y)$ es diferenciable en cualquier punto

Ejemplo 2.106 *En forma análoga demuestre que*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \textit{es diferenciable en } (0,0)$$

mostrando sus existentes derivadas parciales en $(0,0)$, *en una vecindad de* $(0,0)$ *y que son continuas en* $(0,0)$.

Ejemplo 2.107

$$f(x,y) = \sin(x+y) \quad \textit{es diferenciable en } (a,b)$$

pues

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \cos(x+y); \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \cos(x+y) \\ \lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \quad y \quad \lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \end{aligned}$$

y por tanto existen las derivadas parciale en (a,b),

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \cos(a+b); \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \cos(a+b)$$

y además existen en una vecindad de (a,b) *y son continuas en* (a,b) *ya que*

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(a,b)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(a,b)}\cos(x+y)=\cos(a+b)=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\\ \lim_{(x,y)\to(a,b)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(a,b)}\cos(x+y)=\cos(a+b)=\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\end{aligned}$$

y así $f(x,y)=\sin(x+y)$ *es diferenciable en* (a,b) *y*

$$df(a,b)=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)dx+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)dy=\cos(a+b)dx+\cos(a+b)dy$$

Propiedad 4

Si f es una función diferenciable en x, entonces f tiene derivada direccional en x (por lo tanto si la función no tiene derivada direccional en x entonces la función no es diferenciable en x) y además

$$\begin{aligned}D_u f(x) &= \nabla f(x).u=\|\nabla f(x)\|\,\|u\|\cos\theta\\ &= \|\nabla f(x)\|\cos\theta\end{aligned}$$

Ejemplo 2.108 *Como*

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$$

es diferenciable en $(1,2,3)$ *(propiedad 3), entonces* f *tiene derivada direccional en* $(1,2,3)$ *y*

$$D_u f(1,2,3)=\nabla f(1,2,3).(a,b,c)=(2,4,6)\,.(a,b,c)=2a+4b+6c$$

con

$$u=(a,b,c)=(\cos\theta,\cos\alpha,\cos\gamma)\ \textit{vector unitario}$$

Ejemplo 2.109

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$$

no es diferenciable en $(0,0)$, *pues* $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ *no tiene* $D_u f(0,0)$

Ejemplo 2.110 *Sabemos que*

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \textit{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \textit{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

es diferenciable en $(0,0)$, *luego* $f(x,y)$ *tiene derivada direccional en* $(0,0)$ *y*

$$D_u f(0,0) = \nabla f(0,0).(a,b) = 0a + 0b = 0$$

Si f es una función diferenciable entonces

$$D_u f(x) = \nabla f(x).u = \|\nabla f(x)\| \cos\theta$$

donde θ *es el ángulo entre* $\nabla f(x)$ *y el vector unitario* u*, se puede deducir que la derivada direccional es máxima si se elige* u *en la dirección del vector* $\nabla f(x)$ $(\theta = 0)$ *y para hacer mínima* $D_u f(x)$ *se elige* u *en la dirección de* $-\nabla f(x)$ $(\theta = \pi)$. *En otras palabras el vector gradiente* $\nabla f(x)$ *apunta en la dirección del crecimiento más rápido de la función con valor* $\|\nabla f(x)\|$ *, mientras que vector gradiente* -$\nabla f(x)$ *apunta en la dirección del crecimiento mínimo de la función con valor* $-\|\nabla f(x)\|$ *.*

En conclusión: Si f es diferenciable en el punto (x,y) entonces

1) Si $\nabla f(x) = 0$, entonces $D_u f(x) = 0$

2 . La dirección de máximo crecimiento en f viene dado por $\nabla f(x)$, el valor máximo de $D_u f(x)$ es $\|\nabla f(x)\|$

3. La dirección de mínimo crecimiento de f viene dado por $-\nabla f(x)$ y el valor mínimo de $D_u f(x)$ es $-\|\nabla f(x)\|$

Ejemplo 2.111

Hallar $D_u f(1,2)$ *en la dirección del vector* $(2,-3)$ *si* $f(x,y) = x^2 + y^2$

Como $(2,-3)$ *no es unitario entonces lo volvemos unitario, dividiendo por su norma* $\sqrt{13}$*, luego* $u = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{-3}{\sqrt{13}}\right)$ *y como* $f(x,y) = x^2 + y^2$ *es diferenciable en* $(1,2)$ *entonces*

$$\begin{aligned} D_u f(1,2) &= \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)\frac{2}{\sqrt{13}} + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)\frac{-3}{\sqrt{13}} \\ &= 2.\frac{2}{\sqrt{13}} + 4.\frac{-3}{\sqrt{13}} = -\frac{8\sqrt{13}}{13} \end{aligned}$$

Ejemplo 2.112

Hallar $D_u f\left(1, \pi, \frac{\pi}{4}\right)$ *si* $f(x,y,z) = x\cos y \sin z$ *y en la dirección del vector* $2i - j + 4k$

En efecto, el vector unitario que necesitamos es $u=\left(\frac{2}{\sqrt{21}},\frac{-1}{\sqrt{21}},\frac{4}{\sqrt{21}}\right)$ *y como* $f(x,y,z)=x\cos y\sin z$ *es diferenciable en* $\left(1,\pi,\frac{\pi}{4}\right)$ *entonces*

$$\begin{aligned} D_uf\left(1,\pi,\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\partial f}{\partial x}\left(1,\pi,\frac{\pi}{4}\right)a+\frac{\partial f}{\partial y}\left(1,\pi,\frac{\pi}{4}\right)b+\frac{\partial f}{\partial y}\left(1,\pi,\frac{\pi}{4}\right)c \quad \textit{con} \\ u &= (a,b,c)=\left(\frac{2}{\sqrt{21}},\frac{-1}{\sqrt{21}},\frac{4}{\sqrt{21}}\right) \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= \cos y\sin z; \quad \frac{\partial f}{\partial x}\left(1,\pi,\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= -x\sin y\sin z; \quad \frac{\partial f}{\partial y}\left(1,\pi,\frac{\pi}{4}\right)=0 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= x\cos y\cos z; \quad \frac{\partial f}{\partial z}\left(1,\pi,\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} D_uf\left(1,\pi,\frac{\pi}{4}\right) &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\bullet\left(\frac{2}{\sqrt{21}},\frac{-1}{\sqrt{21}},\frac{4}{\sqrt{21}}\right) \\ &= -\frac{\sqrt{42}}{21}-\frac{2}{21}\sqrt{42}=-\frac{3}{21}\sqrt{42} \end{aligned}$$

Ejemplo 2.113

Hallar $D_uf(2,-1,1)$ en la dirección del máximo aumento de $f(x,y,z)$ si $f(x,y,z)=xy+yz$

En efecto: En $(2,-1,1)$ la D_uf aumenta más rapidamente, en la dirección del vector gradiente, $\nabla f(2,-1,1)$, luego

$$\nabla f(x,y,z)=(y,x+z,y); \quad \nabla f(2,-1,1)=(-1,3,-1)$$

y así

$$D_uf(2,-1,1)=\|\nabla f(2,-1,1)\|=\sqrt{11}$$

Ejemplo 2.114 *Sea* $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$

a) Hallar $D_uf(1,2,3)$ en la dirección del vector $(1,1,1)$
b) Hallar la dirección en el cual $D_uf(1,2,3)$ es máxima y cuál es su valor .
c) Hallar la dirección en el cual $D_uf(1,2,3)$ es mínima y cuál es su valor.
En efecto:

$$\nabla f(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)$$

luego
a)

$$\begin{aligned} D_uf(1,2,3) &= \nabla f(1,2,3).u = \nabla f(1,2,3).\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,2,3)\right)\frac{1}{\sqrt{3}} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(1,2,3)\right)\frac{1}{\sqrt{3}} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}(1,2,3)\right)\frac{1}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{4}{\sqrt{3}} + \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

b) La dirección en el cual $D_uf(1,2,3)$ es máxima es

$$\nabla f(1,2,3) = (2,4,6) \text{ y su valor es } D_uf(1,2,3) = \|(2,4,6)\| = \sqrt{4+16+36} = \sqrt{56}$$

c) La dirección en el cual $D_uf(1,2,3)$ es mínima es

$$-\nabla f(1,2,3) = (-2,-4,-6) \text{ y su valor es } D_uf(1,2,3) = -\sqrt{4+16+36} = -\sqrt{56}$$

Ejemplo 2.115

Hallar $D_uf(1,3)$ *en la dirección de* $(1,3)$ *hacia* $(2,4)$ *si* $f(x,y) = x^2 + y^2$

En efecto:

$$(2,4) - (1,3) = (1,1) \quad \text{y así } u = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

luego

$$D_uf(1,3) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,3)\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\partial f}{\partial y}(1,3)\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}}$$

Ejemplo 2.116

Una partícula rastreadora de calor está situada en el punto $(2,-3)$ de una placa metálica cuya temperatura en (x,y) es $T(x,y) = 20 - x^2 - y^2$. Hallar la trayectoria de la partícula al moverse de forma continua en la dirección de más rápido crecimiento de la temperatura.

En efecto: Representamos la trayectoria por

$$\alpha(t) = x(t)i + y(t)j \text{ y un vector tangente en cada punto } (x(t), y(t))$$

está dado por

$$\alpha'(t) = x'(t)i + y'(t)j$$

Como la partícula busca el crecimiento más rápido de temperatura, la dirección de $\alpha'(t)$ y $\nabla T(x,y) = -2xi - 2yj$ son las mismas en cada punto de la trayectoria, luego

$$\frac{dx}{dt} = -2x; \quad \frac{dy}{dt} = -2y \text{ con } x(0) = 2; \quad y(0) = -3$$

por tanto solucionando las dos ecuaciones se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{x} &= -2dt; \ \frac{dy}{y} = -2dt \text{ entonces} \\
\ln x &= -2t + k_1; \ \ln y = -2t + k_2 \text{ entonces} \\
x(t) &= ce^{-2t}; \ y(t) = c_1 e^{-2t} \text{ entonces} \\
x(0) &= ce^0 = 2 \Rightarrow c = 2; \ x(t) = 2e^{-2t} \text{ y} \\
y(0) &= c_1 e^0 = -3 \Rightarrow c = -3; \ y(t) = -3e^{-2t}
\end{aligned}$$

luego la trayectoria es

$$\begin{aligned}
\alpha(t) &= 2e^{-2t}i - 3e^{-2t}j \text{ y eliminando } t \text{ se tiene que} \\
x(t) &= 2e^{-2t} = \frac{2}{-3}(-3)e^{-2t} = -\frac{2}{3}y \text{ entonces} \\
x &= -\frac{2}{3}y \text{ es el camino}
\end{aligned}$$

Propiedad 5

$$Si \ \ f(x,y,z) = cte \text{ entonces } df = 0$$

Propiedad 6

$$d(f \pm g) = d(f) \pm d(g)$$

Ejemplo 2.117

$$\begin{aligned}
d\left(x^2 + xy + y^2\right) &= d(x^2 + xy) + d(y^2) = d(x^2) + d(xy) + d(y^2) \\
&= 2xdx + xdy + ydx + 2ydy
\end{aligned}$$

Propiedad 7

$$d(fg) = fdg + gdf$$

Ejemplo 2.118

$$\begin{aligned} d(\sin x \cos y) &= \sin x d(\cos y) + \cos(y) d(\sin x) \\ &= \sin x(-\sin y)dy + \cos y \cos x dx \end{aligned}$$

Propiedad 8

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gdf - fdg}{g^2}$$

Ejemplo 2.119

$$\begin{aligned} d\left(\frac{x^2y + y}{\sin x}\right) &= \frac{\sin x d(x^2y + y) - (x^2y + y)d(\sin x)}{\sin^2 x} \\ &= \frac{\sin x(d(x^2y) + d(y)) - (x^2y + y)\cos x dx}{\sin^2 x} \\ &= \frac{\sin x(yd(x^2) + x^2dy + dy) - (x^2y + y)\cos x dx}{\sin^2 x} \\ &= \frac{\sin x(2yxdx + x^2dy + dy) - (x^2y + y)\cos x dx}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

Ejemplo 2.120 *Si*

$$z = f(x, y) = x^2 + 3xy \qquad \textit{entonces}$$

a) Hallar dz
b) Si x *cambia de* 2 *a* 2.05 *y* y *cambia de* 3 *a* 2.96*, comparar los valores de* Δz *y* dz*.*
En efecto:
a)

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy \\ &= (2x + 3y)dx + (3x)dy \end{aligned}$$

b) Como

$$x = 2; \quad dx = h_1 = 0.05; \quad y = 3; \quad dy = h_2 = -0.04$$

entoces

$$\begin{aligned} dz &= (2*2+3*3)0.05+(3*2)(-0.04) \\ &= (13)0.05-6(0.04)=0.41 \\ \Delta z &= f(x+h_1,y+h_2)-f(x,y)=f(2+0.05,3-0.04)-f(2,3) \\ &= f(2.05,2.96)-f(2,3)=(2.05)^2+3\,(2.05)\,(2.96)-(4+18) \\ &= (2.05)^2+3\,(2.05)\,(2.96)-22=0.406\,5 \end{aligned}$$

luego

$$dz \approx \Delta z$$

Ejemplo 2.121 *Aproximar el cambio en la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos 6 y 8 cm. Cuando el más corto se alarga* $\frac{1}{4}$ *y el más largo se encoge* $\frac{1}{8}cm$

En efecto: Sean x,y *los catetos y z la hipotenusa, entonces* $z=\sqrt{x^2+y^2}$, *luego*

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy \\ &= \frac{6}{\sqrt{36+64}}.\frac{1}{4}-\frac{8}{\sqrt{36+64}}.\frac{1}{8}=\frac{6}{40}-\frac{8}{80}=\frac{3}{20}-\frac{4}{40} \\ &= \frac{3}{20}-\frac{2}{20}=\frac{1}{20}cm, \end{aligned}$$

Luego la hipotenusa se alarga $\frac{1}{20}cm$.

Ejemplo 2.122 *Hallar el valor aproximado de*

$$\sin\left((1.05)^2+(0.9)^2\right)-\sin(1^2+1^2)$$

En efecto: Consideremos la función

$$f(x,y)=\sin\left(x^2+y^2\right) \text{ entonces}$$

$$f(x+h_1,y+h_2)-f(x,y)\approx\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)h_1+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)h_2=2x\cos\left(x^2+y^2\right)h_1+2y\cos\left(x^2+y^2\right)h_2=$$

$$=2.\,(0.05)\cos\left(1^2+1^2\right)+2.\,(-0.1)\cos\left(1^2+1^2\right)=(-0.1)\cos 2=4.\,161\,5\times10^{-2}$$

Ejemplo 2.123 *Hallar el valor aproximado de*

$$\sqrt{9(1.95)^2 + (8.1)^2}$$

En efecto: Consideremos la función

$$f(x, y) = \sqrt{9x^2 + y^2} \text{ } \textit{pués}$$

se puede calcular fácilmente

$$f(2, 8) = \sqrt{(9)(4) + 64} = \sqrt{100} = 10$$

por tanto tomamos

$$x = 2; \quad y = 8; \quad dx = h_1 = -0.05; \quad dy = h_2 = 0.1$$

entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{9x}{\sqrt{9x^2 + y^2}}; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{\sqrt{9x^2 + y^2}}, \quad \textit{por tanto como} \\
f(x + h) &\approx f(x) + f^{'}(x)h \quad \textit{se tiene que} \\
f(x + h_1, y + h_2) &\approx f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)h_2 \\
\sqrt{9(1.95)^2 + (8.1)^2} &= f(1.95, 8.1) \approx f(2, 8) + dz = f(2, 8) + \frac{\partial f}{\partial x}(2, 8)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(2, 8)h_2
\end{aligned}$$

$$= 10 + \frac{18}{10}(-0.05) + \frac{8}{10}0.1 \approx 9.9 \quad \textit{así que} \quad \sqrt{9(1.95)^2 + (8.1)^2} \approx 9.99$$

Ejemplo 2.124 *Aproximar*

$$\sqrt{27}.\sqrt[3]{1021}$$

Tomar

$$f(x, y) = \sqrt{x}.\sqrt[3]{y} \quad \textit{con} \quad x = 25; \quad y = 1000; \quad \Delta x = h_1 = 2; \quad \Delta y = dy = 21$$

$$\begin{aligned}
df &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy = \frac{y^{\frac{1}{3}}}{2\sqrt{x}}h_1 + \frac{1}{3}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{2}{3}}h_2 = \\
&= \frac{1}{2}(25)^{-\frac{1}{2}}(1000)^{\frac{1}{3}}(2) + \frac{1}{3}(25)^{\frac{1}{2}}(1000)^{-\frac{2}{3}}(21) \approx 2.35,
\end{aligned}$$

luego

$$\sqrt{27}.\sqrt[3]{1021} \approx \sqrt{25}.\sqrt[3]{1000} + 2.35 = 52.35$$

Ejemplo 2.125 *Hallar el valor aproximado de*

$$\sqrt[3]{26.98}.\sqrt{36.01}$$

En efecto: Consideremos la función

$$f(x,y)=\sqrt[3]{x}\sqrt{y} \quad con\ x=27,\ y=36$$

y se puede calcular fácilmente

$$f(27,36)=(3)(6)=18$$

por tanto tomamos

$$x=27; \quad dx=h_1=-0.02; \quad dy=h_2=0.01, y=36$$

entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2}(\sqrt{y}); \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\sqrt[3]{x}}{2\sqrt{y}}, \quad por \quad tanto \\
f(x+h_1,y+h_2) &\approx f(x,y)+\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dx+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy \qquad es\ decir \\
\sqrt[3]{26.98}.\sqrt{36.01} &= f(26.98,36.01)\approx f(27,36)+\frac{\partial f}{\partial x}(27,36)(-0.02)+\frac{\partial f}{\partial y}(27,36)(0.01) \\
&= 18+\frac{6}{3(\sqrt[3]{27})^2}(-0.02)+\frac{6}{(2)(6)}(0.01)=18.001
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.126 *Hallar el valor aproximado de*

$$(1.05)^2\,(2.99)^3$$

En efecto: Consideremos la función

$$f(x,y)=x^2y^3 \quad con\ \ x=1,\ y=3$$

y se puede calcular

$$f(1,3)=(1)^2(3)^3=27$$

y si tomamos

$$dx=h_1=0.05; \quad dy=h_2=-0.01; \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2xy^3; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=3x^2y^2$$

entonces

$$\begin{aligned} f(x+h_1, y+h_2) &\approx f(x,y)+dz; \qquad \textit{es decir} \\ f(1.05, 2.99) &= f(1,3)+\frac{\partial f}{\partial x}(1,3)dx+\frac{\partial f}{\partial y}(1,3)dy \\ &= 27+2(1)(27)(0.05)+(3)(1)(9)(-0.01) = 27+(54)(0.05)-(27)(0.01) \\ &= 29.43 \end{aligned}$$

Ejemplo 2.127 *Supongamos que las dimensiones de un paralelipípedo rectangulares cambian de* $(9,6,4)$ *a* $(9.1, 6.02, 3.9)$*, usar diferenciales para estimar el cambio en el volúmen. ¿Cuál es el cambio exacto?.*

El volúmen del paralelipípedo de lados (x,y,z) *viene dado por:*

$$\begin{aligned} V(x,y,z) &= xyz \\ dV &= \frac{\partial V}{\partial x}dx+\frac{\partial V}{\partial y}dy+\frac{\partial V}{\partial z}dz = yzdx+xzdy+xydz \\ &= 24(0.1)+36(0.02)+54(-0.1) = -2.28 \qquad \textit{luego} \\ dV &= -2.28 \end{aligned}$$

El cambio exacto en el volúmen viene dado por

$$V(x+h_1, y+h_2, z+h_3)-V(x,y,z) = (9.1)(6.02)(3.9)-(9)(6)(4) = -2.3502$$

Ejemplo 2.128 *El radio de la base y la altura de un cono circular recto miden* $10cm, 25cm$ *respectivamente, con un posible error en la medición de* $0.01cm$*. Utilizar diferenciales para estimar el error máximo en el volúmen calculado del cono.*

En efecto:

$$\begin{aligned} V_c &= \frac{\pi r^2 h}{3} = V(r,h) \quad \textit{luego} \\ dV &= \frac{\partial V}{\partial r}dr+\frac{\partial V}{\partial h}dh = \frac{2\pi r}{3}hdr+\frac{\pi r^2}{3}dh \\ &= \frac{2\pi}{3}(10)(25)(0.01)+\frac{\pi}{3}(100)(0.01) = 6.2832 \end{aligned}$$

Ejercicio 5

1. Demostrar que

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

no es diferenciable en $(0,0)$. Ind Suponga que f es diferenciable en (0,0) y demuestre que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{|f(0+h)-f(0)-T(h)|}{\|h\|}$ no es cero

2. Demostrar que

$$f(x,y)=\begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

es diferenciable en $(0,0)$. Ind Suponga que f es diferenciable en (0,0) y demuestre que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{|f(0+h)-f(0)-T(h)|}{\|h\|}=0$

3. Considere la función

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

demostrar que: $f(x,y)$ no es continua en $(0,0)$ y $f(x,y)$ es continua en $(1,2)$, $\nabla f(0,0)=(0,0)$, $\nabla f\ (1,2)=\left(\frac{12}{25},\frac{-3}{25}\right)$, $D_uf(0,0)$ existe, $D_uf(1,2)=\frac{12}{25}a-\frac{3}{25}b$, $f(x,y)$ no es diferencial en $(0,0)$, demostrando que $f(x,y)$ no es continua en $(0,0)$ o que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{|f(0+h)-f(0)-T(h)|}{\|h\|}$ no es cero y que $df(1,2)=\frac{12}{25}dx-\frac{3}{25}dy$

4. Considere la función

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

demostrar que: $f(x,y)$ no es continua en $(0,0)$, $f(x,y)$ es continua en $(1,2)$, $\nabla f(0,0)=(0,0)$, $D_uf(0,0)$ no existe $D_uf(1,2)=\left(\frac{120}{289},\frac{-60}{289}\right).(a,b)$, $f(x,y)$ no es diferencial en $(0,0)$, demostrando que $f(x,y)$ no es continua en $(0,0)$ o que

$$\lim_{h\to 0}\frac{|f(0+h)-f(0)-T(h)|}{\|h\|}$$

no es cero y que $df(1,2)=\frac{120}{289}dx+\frac{-60}{289}dy$

5. Considere la función

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

y verificar que $\nabla f(0,0)$ no existe, $\nabla f(1,2) = \left(\frac{3}{25}, \frac{-4}{25}\right)$, $D_u f(0,0)$ no existe, $D_u f(1,2) = \frac{3a}{25} - \frac{4b}{25}$, y demuestre que $f(x,y)$ no es diferenciable en $(0,0)$, demostrando que $f(x,y)$ no es continua en $(0,0)$, $df(1,2) = \frac{3}{25}dx - \frac{4}{25}dy$

6. Demostrar que
$$f(x,y,z) = x^2 e^{y^2 - z^2}$$
es una función diferenciable y hallarla. Ind demuestre que existen las derivadas parciales en (a,b,c), en una vecindad de (a,b,c) y que son continuas en (a,b,c).

7. Hallar la derivada direccional de
$$f(x,y,z) = \left(x + y^2 + z^3\right)^2$$
en $(1,-1,1)$ en la dirección $i{+}j$. Resp $D_u f(1,-1,1) = \nabla f(1,-1,1).\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \frac{-6}{\sqrt{2}}$

8. Hallar la derivada direccional de
$$f(x,y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$$
en dirección hacia el origen Resp: $-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, tomar $u = \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

9. Hallar la derivada direccional de
$$f(x,y,z) = (x-1)e^{yz}$$
en $(0,1,1)$ en la dirección hacia $(2,3,4)$ Re sp $D_u f(0,1,1) = \nabla f(0,1,1).\left(\frac{2}{\sqrt{17}}, \frac{2}{\sqrt{17}}, \frac{3}{\sqrt{17}}\right) = \frac{-3e}{\sqrt{17}}$

10. Hallar la derivada direccional de
$$f(x,y,z) = xy^2 + yz^3 + z^3 x$$
en $(1,2,1)$ en la dirección del máximo aumento de f y en la dirección del mínimo aumento de f Resp $\pm\nabla f(1,2,1) = \pm(5,5,9)$, $\sqrt{131}, -\sqrt{131}$

11. Hallar la derivada direccional de

$$f(x,y,z) = xe^{y^2-z^2}$$

en $(1,2,-2)$ en la dirección del camino

$$\alpha(t) = ti + 2\cos(t-1)j - 2e^{(t-1)}k$$

Resp: $-\frac{7}{5}\sqrt{5}$

12. Aproximar el valor de

$$f(x,y) = \sqrt{20 - x^2 - 7y^2} \quad \text{en} \quad (1.95, 1.08) \quad \text{Resp} \;\; 2.846$$

13. La distribución de temperatura de una placa viene dada por $T(x,y) = 9 - 2x^2 - y^2$ a) ¿Cuál es el punto más caliente? R.$(0,0)$. b) Hallar la trayectoria seguida por una partícula seguidora de calor en la dirección de más rápido crecimiento de temperatura partiendo de $(-2,1)$ Resp: $x = -2y^2$

14. Hallar la diferencial de las funciones:

$a)f(x,y,z) = \ln^2(x^2+y^2+z^2)$, $b)f(x,y,z) = xyze^{xyz}+x\sin y+z\cos xz$ c) $f(x,y,z) = \dfrac{xyz}{x^2+y^2}$

$d)f(x,y,z) = \sin(x^2yz)+e^{(x^2+y^2+z^2)}+1$ $e)$ $f(x,y,z,u) = \dfrac{z}{x+y+u}$

$f)f(x,y) = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)+\arctan\left(\dfrac{x}{y}\right)$ $g)$ $f(x,y) = \ln(\tan y(x))$ h) $f(x,y,z) = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z}}$

15. Hallar $df(1,1,1)$ si $f(x,y,z) = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$, Respuesta $df(1,1,1) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}dx - \frac{1}{2\sqrt{2}}dy + \frac{\sqrt{2}}{2}dz$

16. Aproximar:

a) $(1.01)^3\,(3.02)^2\,(2.9)^4$, Tomar $f(x,y,z)=x^3y^2z^4$ Resp 663, 39

b) $\sqrt{(1.97)^2+(2.02)^2+(1.0)}$, Tomar $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z}$ Resp 2,99

c) $\left(\sqrt{99}+\sqrt[3]{124}\right)^4$ Tomar $f(x,y)=\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{y}\right)^4$ Resp 49.770

d) $\dfrac{1-(3.01)^2}{(5.9)^2}-\dfrac{1-3^2}{36}$ Tomar $f(x,y)=\dfrac{1-x^2}{y^2}$

e) $\sin\left((1.05)^2+(0.9)^2\right)-\sin\left(1^2+1^2\right)$ Tomar $f(x,y)=\sin(x^2+y^2)$

17 Sea

$$f(x,y)=x^2+3xy^2$$

Hallar $D_uf(1,2)$, en dirección hacia el origen $\left(\text{Ind} \quad u=\dfrac{-i-2j}{\sqrt{5}}\right)$ Resp: $-\dfrac{38}{\sqrt{5}}$

18 La longitud y el ancho de un rectángulo son $30cm$ y $24cm$ respectivamente con un error en la medida de $\dfrac{1}{100}$ en cada dimensión, usar diferenciales para estimar el error máximo en el área calculada del rectángulo y cuál es el error exacto. Resp 0.54, 0.5401

19 Si

$$f(x,y)=xy-y^2x \quad \text{y } (x,y) \text{ cambia de } (2,3) \text{ a } (1.9, 3.001)$$

Compare los valores de df y Δf Resp 0.59 .0.5905

20 Si

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^3+y^6} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases} \quad \text{mostrar que}$$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$; $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1)$ existe ; $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1)=0$, $D_uf(0,0)$ existe; $D_uf(1,1)$ existe, f no es continua en $(0,0)$ y es continua en $(1,1)$, $df(0,0)$ no existe; $df(1,1)$ existe

$$D_uf(2,1)=-\frac{15}{81}a+\frac{42}{81}b, \quad df(2,1)=-\frac{15}{81}dx+\frac{42}{81}dy$$

21 Si

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y\,(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad \text{Hallar}$$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0; \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -1; \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ no existe; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \textit{no existe}, D_u f(0,0) = a^2 b - b^3$

$f(x,y)$ es continua en $(0,0)$ y en $(1,2)$

22 Hallar la derivada direccional de

$$f(x,y) = x^2 - 3xy \text{ en la dirección de la trayectoria } y = x^2 - x + 2 \quad \text{en} \quad (1,2)$$

Ind:

$$r(t) = ti + (t^2 - t + 2)j, \quad r'(t) = i + (2t - 1)j \qquad r'(1) = i + j$$

luego

$$D_u f(1,2) = \nabla f(1,2).\left(\frac{i+j}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{7}{\sqrt{2}}$$

Capítulo 3

Regla de la cadena

3.1 Introducción

En este capítulo, se hace un tratado de la regla de la cadena y sus diversas formas, la función implicita, el plano tangente, máximos y mínimos de funciones de varias variables y por último el método de los multiplicadores de lagrange, donde cada sección tiene su taller de ejercicios propuestos con sus debidas respuestas

Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable en x y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, una función derivable en $g(x)$ entonces $h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ es derivable en x y matriz de h puede escribirse como la matriz de f por la matriz de g es decir:

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x) \quad \text{o} \quad \frac{dh}{dx} = \frac{df}{du}\frac{du}{dx} \quad \text{si} \quad u = g(x)$$

Generalizando el resultado anterior se tiene que si $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en x y $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ es diferenciable en $g(x)$ entonces $h(x) = f(g(x))$ es diferenciable en x y la matriz de h, (M_h) es igual a la matriz de f, (M_f) por la matriz de g, (M_g), es decir, si $h : \mathbb{R}^n \xrightarrow{g} \mathbb{R}^m \xrightarrow{f} \mathbb{R}^p$, entonces $h(x) = f(g(x))$ y

$$M_{h(p\times n)} = (M_f)_{p\times m} \times (M_g)_{m\times n}$$

Caso 1 *Sea*

$$h(t) = f(x(t), y(t)) = f(x, y) \quad \textit{entonces} \;\; h(t) = f(g(t)) \quad \textit{donde} \;\; h : \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

y así

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = M_f \times M_g$$

Ejemplo 3.1 *Si*

$f(x,y)=x^2y;\quad x(t)=e^t;\quad y(t)=\sin t$ *entonces* $\dfrac{\partial f}{\partial x}=2xy,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=x^2\quad \dfrac{\partial x}{\partial t}=e^t,\ \dfrac{\partial y}{\partial t}=\cos t$

por lo tanto como

$$\begin{aligned} h(t) &= f(x(t),y(t)) \quad \textit{entonces} \\ \frac{dh}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}=2xye^t+x^2\cos t=2(e^t\sin(t))e^t+(e^t)^2\cos t \\ &= 2e^{2t}\sin(t)+e^{2t}\cos(t) \end{aligned}$$

Caso 2 *Si*

$$h(r,\theta)=f(x,y)=f(x(r,\theta),y(r,\theta))=f(g(r,\theta))$$

luego

$$h:\mathbb{R}^2\xrightarrow{g}\mathbb{R}^2\xrightarrow{f}\mathbb{R} \quad \textit{entonces}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial h}{\partial r},\frac{\partial h}{\partial \theta}\right)_{1\times 2} &= \left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{1\times 2}\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix}, \ \textit{entonces,} \\ \frac{\partial h}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \quad y \quad \frac{\partial h}{\partial \theta}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} \end{aligned}$$

Ejemplo 3.2 *Si*

$$h=f(x,y)=x^2+y^2;\quad x(r,\theta)=r\cos\theta,\quad y(r,\theta)=r\sin\theta\quad \frac{\partial f}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial f}{\partial y}=2y$$

$$\frac{\partial x}{\partial r}=\cos\theta,\ \frac{\partial y}{\partial r}=\sin\theta,\ \frac{\partial x}{\partial \theta}=-r\sin\theta,\ \frac{\partial y}{\partial \theta}=r\cos\theta$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=2x\frac{\partial x}{\partial r}+2y\frac{\partial y}{\partial r} \\ &= (2r\cos\theta)\cos\theta+2r\sin\theta\sin\theta=2r, \quad \textit{luego} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial h}{\partial r}=2r$$

y

$$\frac{\partial h}{\partial \theta}=\frac{\partial f}{\partial \theta}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}=2x\frac{\partial x}{\partial \theta}+2y\frac{\partial y}{\partial \theta}$$

$$=2(r\cos\theta)(-r\sin\theta)+2(r\sin\theta)r\cos\theta=0, \quad \textit{luego}$$

$$\frac{\partial h}{\partial \theta}=0$$

Caso 3 *Si*

$$z(r,\theta,\vartheta) = f(x,y,z) = f(x(r,\theta,\vartheta), y(r,\theta,\vartheta), z(r,\theta,\vartheta))$$

entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r} \\
\frac{\partial z}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \theta} \\
\frac{\partial z}{\partial \vartheta} &= \frac{\partial f}{\partial \vartheta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \vartheta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \vartheta} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \vartheta}
\end{aligned}$$

y en forma matricial se tiene que $z : \begin{array}{c} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ (r,\theta,\vartheta) \to g(r,\theta,\vartheta) \to f(g(r,\theta,\vartheta)), \end{array}$ *luego*

$$\begin{aligned}
(M_z)_{1\times 3} &= (M_f)_{1\times 3} \times (M_g)_{3\times 3} \\
&= \left(\frac{\partial z}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial \theta}, \frac{\partial z}{\partial \vartheta}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \times \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Caso 4 *Si*

$$z = f(x,y) = f(x(r,\theta,\vartheta,t), y(r,\theta,\vartheta,t))$$

entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \\
\frac{\partial z}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} \\
\frac{\partial z}{\partial \vartheta} &= \frac{\partial f}{\partial \vartheta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \vartheta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \vartheta} \\
\frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}
\end{aligned}$$

y en forma matricial se tiene que $z : \begin{array}{c} \mathbb{R}^4 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ (r,\theta,\vartheta,t) \to g(r,\theta,\vartheta,t) \to f(g(r,\theta,\vartheta,t)), \end{array}$ *luego*

$z = f(g(r,\theta,\vartheta,t))$ *y así*

$$\begin{aligned}(M_z)_{1\times 4} &= (M_f)_{1\times 2} \times (M_g)_{2\times 4} \\ \left(\frac{\partial z}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial \theta}, \frac{\partial z}{\partial \vartheta}, \frac{\partial z}{\partial t}\right) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \times \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Caso 5 *si*

$$w = f(x,y,z) = f(x(r,\theta,\vartheta,t,s), y(r,\theta,\vartheta,t,s), z(r,\theta,\vartheta,t,s))$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial z}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial} \\ \frac{\partial z}{\partial \vartheta} &= \frac{\partial f}{\partial \vartheta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \vartheta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \vartheta} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{array}{c} w : \mathbb{R}^5 \xrightarrow{g} \quad \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ w = f(g(r,\theta,\vartheta,t,s)), \end{array} \quad \textit{por} \;\; \tan to \quad (M_w)_{1\times 5} = (M_f)_{1\times 3} \times (M_g)_{3\times 5}$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial r}, \frac{\partial w}{\partial \theta}, \frac{\partial w}{\partial \vartheta}, \frac{\partial w}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial s}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \times \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} & \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} & \frac{\partial z}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial s} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 3.3

$$w = f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$$

$$x(r,\theta,\vartheta,t,s) = e^{rt}\theta; \quad y(r,\theta,\vartheta,t,s) = \sin(r\theta) \qquad z(r,\theta,\vartheta,t,s) = rst$$

entonces

$$\left(\frac{\partial w}{\partial r}, \frac{\partial w}{\partial \theta}, \frac{\partial w}{\partial \vartheta}, \frac{\partial w}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial s}\right) = (2x, 2y, -2z) \times \begin{bmatrix} t\theta e^{rt} & e^{rt} & 0 & \theta r e^{rt} & 0 \\ \theta\cos(r\theta) & r\cos(r\theta) & 0 & 0 & 0 \\ st & 0 & 0 & rs & rt \end{bmatrix}$$

$$= \left(2\theta e^{rt}, 2\sin(r\theta), -2rst\right) \times \begin{bmatrix} t\theta e^{rt} & e^{rt} & 0 & \theta r e^{rt} & 0 \\ \theta\cos(r\theta) & r\cos(r\theta) & 0 & 0 & 0 \\ st & 0 & 0 & rs & rt \end{bmatrix}$$

luego por ejemplo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial r} &= \left(2\theta e^{rt}\right)\left(t\theta e^{rt}\right) + 2\sin(r\theta)\left(\theta\cos(r\theta)\right) - 2rst(st) \\ \frac{\partial w}{\partial s} &= \left(2\theta e^{rt}\right)(0) + 2\sin(r\theta)(0) - 2rst(rt) \end{aligned}$$

Ejemplo 3.4 *Si*

$$z = f(x,y); \quad x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

Mostrar que

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2$$

En efecto: Como $z = f(x,y) = f(x(r,\theta), y(r,\theta))$ *entonces*

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \qquad y \qquad \frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}$$

Como

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta; \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta; \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta; \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta$$

entonces

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2 &= \left[\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta\right]^2 + \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(-r\sin\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta)\right]^2 \\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta\right]^2 + \left[-\frac{\partial f}{\partial x}(\sin\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(\cos\theta)\right]^2 \frac{r^2}{r^2} \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \cos^2\theta + \frac{2\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\cos\theta\sin\theta + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \sin^2\theta + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \sin^2\theta - \frac{2\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\cos\theta\sin\theta + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \cos^2\theta$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \quad \text{así}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$$

Ejemplo 3.5 *Si*

$$\begin{aligned} w &= f(x,y) = f(x(r,\theta), y(r,\theta)) \quad \text{sabemos que} \\ \frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \end{aligned}$$

Como

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(f(x(r,\theta), y(r,\theta))\right)$$

tiene la misma característica de $f(x(r,\theta), y(r,\theta))$ entonces para calcular su derivada con respecto a r y a θ, hay que aplicarle a $\frac{\partial f}{\partial x}$ la regla de la cadena como a f es decir,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial \theta} \end{aligned}$$

y así podemos calcular

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \quad o \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \quad o \quad \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta} \quad o \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial r}$$

así:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial r} &= \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right) \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial \theta}\right]\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial \theta \partial r} + \\ &\quad + \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial \theta}\right]\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial \theta \partial r} \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial \theta \partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial \theta \partial r}$$

Ejemplo 3.6 *Si*

$$z = f(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy; \quad x(r,\theta) = r\cos\theta; \; y(r,\theta) = r\sin\theta$$

Luego

$$z(r,\theta) = (r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 + r^2\sin 2\theta = r^2 + r^2\sin 2\theta$$

por tanto

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\theta\partial r} = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial\theta}(2r + 2r\sin 2\theta) = 4r\cos 2\theta$$

luego

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\theta\partial r} = 4r\cos 2\theta$$

Ahora por la regla de la cadena como

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= 2x + 2y; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 2x; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} &= 2; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = 2; \quad \frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta; \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta \\
\frac{\partial x}{\partial\theta} &= -r\sin\theta; \quad \frac{\partial y}{\partial\theta} = r\cos\theta; \quad \frac{\partial^2 x}{\partial\theta\partial r} = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial\theta}(\cos\theta) = -\sin\theta \\
\frac{\partial^2 y}{\partial\theta\partial r} &= \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta) = \cos\theta
\end{aligned}$$

así:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\theta\partial r} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial\theta}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\frac{\partial y}{\partial\theta}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial\theta\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial\theta}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial\theta}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial\theta\partial r}$$

$$\begin{aligned}
&= (2)(-r\sin\theta)\cos\theta + 2r\cos\theta\cos\theta + (2(r\cos\theta) + 2r\sin\theta)(-\sin\theta) \\
&\quad +2(-r\sin\theta)\sin\theta + 2r\cos\theta\sin\theta + (2(r\sin\theta) + 2r\cos\theta)(\cos\theta) \\
&= -2r\sin\theta\cos\theta + 2r\cos^2\theta - 2r\cos\theta\sin\theta - 2r\sin^2\theta \\
&\quad -2r\sin^2\theta + 2r\sin\theta\cos\theta + 2r\cos\theta\sin\theta + 2r\cos^2\theta \\
&= 4r\cos^2\theta - 4r\sin^2\theta = 4r\cos 2\theta
\end{aligned}$$

Como

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(2r^2\cos 2\theta\right) = -4r^2\sin 2\theta$$

y si aplicamos la regla de la cadena, deducimos que

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}\right) = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial \theta^2} + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} = \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial \theta}\right]\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial \theta^2} + \\
&\quad + \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial \theta}\right]\frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} \\
&= 2r^2 \sin^2\theta + 2r\cos\theta(-r\sin\theta) + (2r\cos\theta + 2r\sin\theta)(-r\cos\theta) \\
&\quad +2\,(-r\sin\theta)\,(r\cos\theta) + 2r^2\cos^2\theta + (2r\sin\theta + 2r\cos\theta)(-r\sin\theta) \\
&= 2r^2\sin^2\theta - 2r^2\cos\theta\sin\theta - 2r^2\cos^2\theta - 2r^2\cos\theta\sin\theta - 2r^2\cos\theta\sin\theta \\
&\quad +2r^2\cos^2\theta - 2r^2\sin^2\theta - 2r^2\sin\theta\cos\theta \\
&= -8r^2\cos\theta\sin\theta = -4r^2\sin 2\theta
\end{aligned}
$$

En forma análoga mostrar directamente y por la regla de la cadena que

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta} &= 4r\cos 2\theta \\
\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} &= 2 + 2\sin 2\theta
\end{aligned}
$$

En forma análoga si

$$w = f(x,y,z) = xyz; \qquad x = r\cos\theta\sin\varphi, \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi \quad z = r\cos\varphi$$

por medio de la regla de la cadena hallar

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2};\ \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2};\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi \partial r};\ \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2};\frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \varphi};\frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta};\ \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi \partial \theta}$$

Ejemplo 3.7 *Dos objetos se mueven por las curvas, el primero por*

$$x_1 = \cos t; \qquad y_1 = 2\sin t$$

y el segundo por

$$x_2 = 2\sin 2t; \qquad y_2 = \cos 2t$$

¿A qué ritmo está combiando la distancia entre ellos cuando $t = \pi/2$?

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos t = \cos \pi/2 = 0; \qquad y_1 = 2\sin t = \sin \pi/2 = 2, x_2 = 2\sin 2t = 2\sin \pi = 0; \\ y_2 &= \cos 2t = \cos \pi = -1, \frac{\partial x_1}{\partial t} = -\sin t = -\sin \pi/2 = -1 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial t} = 4\cos 2t = 4\cos \pi = -4, \ \frac{\partial y_1}{\partial t} = 2\cos t = 2\cos \frac{\pi}{2} = 0, \frac{\partial y_2}{\partial t} = -2\sin 2t = 0$$

La distancia entre ellos viene dada por:

$$s = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(0-0)^2 + (-1-2)^2} = 3$$

$$\frac{\partial s}{\partial x_1} = \frac{-(x_2 - x_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} = 0, \quad \frac{\partial s}{\partial y_1} = \frac{-(y_2 - y_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} = \frac{-3}{3}$$

$$\frac{\partial s}{\partial x_2} = \frac{(x_2 - x_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} = 0, \quad \frac{\partial s}{\partial y_2} = \frac{(y_2 - y_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} = 3/3$$

luego

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial t} &= \frac{\partial s}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial t} \\ &= 0.(-1) + 0(-4) + (-1)(0) + (1)(0) = 0 \end{aligned}$$

por lo tanto la distancia entre los dos objetos no esta cambiando

Ejemplo 3.8 *El volúmen v de un cilindro circular recto de radio r y de altura h es $V = \pi r^2 h$. Si el volúmen aumenta a razón de $72\pi cm^3/\min$, mientras que la altura disminuye a razón de $4cm/\min$. Hallar la razón de aumento del radio cuando la altura es de $3cm$ y el radio es de $6cm$.*

Solución:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial t} = 2\pi r h\frac{dr}{dt} + \pi r^2 \frac{dh}{dt} \qquad \text{como } \frac{dV}{dt} = 72\pi \quad \frac{dh}{dt} = -4$$

entonces despejamos $\frac{dr}{dt}$ *para obtener* $\frac{dr}{dt} = \frac{\left(\frac{dV}{dt} - \pi r^2 \frac{dh}{dt}\right)}{2\pi r h} = \frac{72\pi - \pi(36)(-4)}{36\pi} = \frac{126\pi}{36\pi} = 6cm/\min$

Ejercicio 6 *solucionar los ejercicios siguientes*

1. Si
$$z = x^2 - 3x^2y^3; \quad x = ue^v, \; y = ue^{-v} \quad \textit{mostrar que}$$
$$\frac{\partial z}{\partial u} = 2ue^{2v} - 15u^4e^{-v}, \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = 2u^2e^{2v} + 3u^5e^{-v}$$

2. Si
$$z = f(x,y); \; x = ue^v, \quad y = ue^{-v} \quad \text{mostrar que}$$
$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{df}{dx}e^v + \frac{df}{dy}e^{-v}, \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{df}{dx}ue^v - \frac{df}{dy}ue^{-v}$$

3. Si
$$w = f(p,q,r); \; p(x,y,z) = e^{xyz}; \; q(x,y,z) = x^2y \quad \text{y} \quad r(x,y,z) = (x^2+y+z^2)^2$$
mostrar que
$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{df}{dp}yze^{xyz} + \frac{df}{dq}2xy + \frac{df}{dr}4x(x^2+y+z^2)$$
$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{df}{dp}xze^{xyz} + \frac{df}{dq}x^2 + \frac{df}{dr}2(x^2+y+z^2)$$
$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{df}{dp}xye^{xyz} + \frac{df}{dq}.0 + \frac{df}{dr}4z(x^2+y+z^2)$$

4. Si
$$w = xy + yz + zx, \; x = rt, \; y = e^{rt}, \quad z = t^2r$$
mostrar que
$$\frac{\partial w}{\partial r} = e^{rt}t + 2rt^3 + rt^2e^{rt} + rt^3e^{rt} + t^2e^{rt}$$
$$\frac{\partial w}{\partial t} = re^{rt} + 3r^2t^2 + r^2te^{rt} + r^2t^2e^{rt} + 2rte^{rt}$$

5. Si
$$f(x,y,z) = xy + yz + zx, x = x(r,\theta,\varphi), y = y(r,\theta,\varphi), z = z(r,\theta,\varphi),$$
$$\text{Hallar} \;\; \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{\partial f}{\partial \varphi}, \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta}$$

$$\begin{aligned} \text{Ind .por ejemplo } \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}\right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} =$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial z}{\partial r}\right]\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial r^2} +$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial z}{\partial r}\right]\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial r^2} +$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial r}\right]\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} =$$

$$= \left[\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial r}\right]\frac{\partial x}{\partial r} + (y+z)\frac{\partial^2 x}{\partial r^2} + \left[\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial r}\right]\frac{\partial y}{\partial r} + (x+z)\frac{\partial^2 y}{\partial r^2} + \left[\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial y}{\partial r}\right]\frac{\partial z}{\partial r} + (y+x)\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}$$

6. Si

$$u = f(x,y); x = e^s \cos t,\ \ y = e^s \sin t$$

Demostrar que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = e^{-2s}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right)$$

7. Si

$$z = f(x,y),\ \ x = s+t,\ \ y = s-t, \text{ demuestre que } \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial z}{\partial t}$$

8. Si

$$u = f(x,y); x = e^r \cos t,\ \ y = e^r \sin t$$

entonces

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{-2r}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)$$

9. Si

$$u = f(x,y),\ \ x = r\cos\theta,\ \ y = r\sin\theta$$

demostrar que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}$$

10. Sea

$$h(x) = f(g(x)); \quad g = (g_1, ..., g_n)$$

es un campo vectorial diferenciable en a , f en un campo escalar diferenciable en $g(a) = b$; Demostrar que

$$\nabla h(a) = \sum_{k=1}^{n} D_k f(b) \nabla g_k(a)$$

11. Sea

$$l(x, y, z) = (x - y + z)\, i + xyzj + z^2 yk \quad \text{y}$$

$$f(x, y) = e^{x+2y} i + \sin(y + 2x) j, \; g(u, v, w) = (u + 2v^2 + 3w^3) i + (2v - u^2) j$$

a) Hallar las matrices jacobianas de l,g, f b) Calcular $h(u, v, w) = f(g(u, v, w))$
c) Calcular $Dh(1, -1, 1)$ Respuesta

$$M_l = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ yz & xz & xy \\ 0 & z^2 & 2zy \end{bmatrix} \quad M_f = \begin{bmatrix} e^{x+2y} & 2e^{x+2y} \\ 2\cos(y + 2x) & \cos(y + 2x) \end{bmatrix}$$

$$M_g = \begin{bmatrix} 1 & 4v & 9w^2 \\ -2u & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$h(u, v, w) = f(g(u, v, w)) = e^{u+2v^2+3w^3+4v-2u^2} i + \sin\left(2v - u^2 + 2u + 4v^2 + 6w^3\right) j$$

$$M_{h(1,-1,1)} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 9 \\ 0 & -6\cos 9 & 18\cos 9 \end{bmatrix}$$

12. Hallar la matriz jacobiana de $f(x, y, z) = xi + yj + zk$ Res

$$M_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

13. El cambio de variable

$$x = u + v; \; y = uv^2 \;\; \text{transforma} \;\; f(x, y) \;\; \text{en} \; g(u, v)$$

Calcular

$$\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} \text{ en } (u, v) = (1, 1) \text{ si } \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1 \text{Resp } 8$$

14. El cambio de variable

$$x = uv; \ y = \frac{u^2 - v^2}{2} \text{ transforma } \ f(x,y) \ \text{ en } g(u,v)$$

a) Mostrar que

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}v + \frac{\partial f}{\partial y}u, \qquad \frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}u - \frac{\partial f}{\partial y}v$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = uv\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \left(u^2 - v^2\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - uv\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial x}$$

b) Si

$\|\nabla f(x,y)\|^2 = 2$ hallar a y b tal que $a\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 - b\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2 = u^2 + v^2$ Resp $a = 1/2, b = -1/2$

15 Suponga que se calienta un cilindro circular recto sólido y que su radio aumenta a razón de $0.2cm/hora$ y su altura a $0.5cm/hora$. Hallar la razón del aumento del área con respecto al tiempo, cuando el radio mide $10cm$ y la altura 100.

Ind:

$$s = 2\pi rh + 2\pi r^2; \frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial s}{\partial h}\frac{dh}{dt} = 58\pi cm^2/hora$$

16 La altura de un cono circular recto es de $15cm$ y está creciendo a $0.2cm/\min$ .El radio de la base es de $10cm$ y decrece $0.3cm/\min$.¿Con qué rapidéz está cambiando el volúmen del cono?

Ind:

$$V_c = \frac{1}{3}\pi x^2 y = \frac{1}{3}\pi r^2 h, \ \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt} = -\frac{70\pi}{3}cm^3/\min$$

3.2 Función Implícita

En esta sección, se explica el concepto de función implicita, la segunda diferencial y se presenta una variedad de ejemplos resueltos, al igual que una sección de ejercicios propuestos con sus debidas respuestas

Una aplicación importante de la regla de la cadena, es que sirve para determinar la derivada de una función definida implicitamente.

Cuando el gráfico de la ecuación,

$$F(x, y) = 0$$

representa en el plano una curva que no es una relación funcional, es posible subdividir esta curva en subcurvas que representan funciones, como por ejemplo, en la ecuación

$$x^2 + y^2 - 4 = 0$$

cuyo gráfico es una relación no funcional, se puede dividir por ejemplo en dos funciones :

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2} \quad \text{y} \quad g(x) = -\sqrt{4 - x^2}$$

Es evidente que si algún punto (x,y) satisface a f(x) y a g(x) entonces éste punto satisface la ecuación

$$x^2 + y^2 - 4 = 0$$

y en casos como estos, se dice que

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2} \text{ y } g(x) = -\sqrt{4 - x^2}$$

estan definidas implicitamente por la ecuación $x^2 + y^2 = 4$ y en general, la ecuación

$$F(x, y) = 0$$

define una o varias funciones implícitas si :

1) $F(x, y) = 0$ representa una relación no funcional y

2) Existe $y = f(x)$ tal que $F(x, f(x)) = 0$ para todo$x \epsilon D_f$

Supongamos que x y y están relacionados mediante la ecuación

$$F(x, y) = 0$$

donde se supone que $y = f(x)$ es una función derivable de x, para hallar $\dfrac{dy}{dx}$, consideramos la función

$$w = F(x, y) = F(x, y(x))$$

entonces

$$\frac{dw}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} . \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} . \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} .1 + \frac{\partial F}{\partial y} . \frac{dy}{dx}$$

y como $w = F(x, y)$ para todo x en el dominio de y(x), entonces $\dfrac{dw}{dx} = 0$ y así

$$\frac{dw}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} .1 + \frac{\partial F}{\partial y} . \frac{dy}{dx} = 0$$

entonces

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}$$

A manera de ejemplo

Ejemplo 3.9 *Consideremos la ecuación*

$$x^2 + y^2 = 4$$

que representa una relación no funcional y calculemos $\dfrac{dy}{dx}$*, la derivada de la función implicita.*

La derivada de la función implicita la podemos calcular de 3 formas:
1) Aplicando la conclución anterior

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

si

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$$

2) Por diferenciales, aplicando diferenciales en ambos lados de la igualdad, se tiene

$$d(x^2 + y^2 - 4) = d(0)$$

para obtener

$$2xdx + 2ydy - 0 = 0$$

y dividiendo por 2dx la igualdad, se tiene que

$$x + y\frac{dy}{dx} = 0$$

y así

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

3)Por derivación implícita, como y es una función de x, entonces

$$x^2 + y^2(x) = 4$$

y derivando ambos lados de la igualdad con respecto a x se tiene que

$$2x + 2yy'(x) = 0$$

luego

$$y'(x) = -\frac{x}{y}$$

En varias variables el trabajo es muy análogo, pués si por ejemplo el gráfico de la ecuación

$$F(x, y, z) = 0$$

es una relación no funcional que define a z como función de x y de y, entonces

$$F(x, y, z(x, y)) = 0$$

y para hallar las derivadas de la función implicita

$$\frac{\partial z}{\partial x} \text{ y } \frac{\partial z}{\partial y}$$

aplicamos la regla de la cadena primero derivando con respecyo a x la ecuación :

$$F(x, y, z(x, y)) = 0$$

para obtener

$$\frac{\partial F}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x}.1 + \frac{\partial F}{\partial y}.0 + \frac{\partial F}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

y de aquí

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

y derivando con respecto a y la misma ecuación se obtiene que

$$\frac{\partial F}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial x}.0 + \frac{\partial F}{\partial y}.1 + \frac{\partial F}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

y de aquí

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

A manera de ejemplo

Ejemplo 3.10 *Consideremos la ecuación*

$$x^2 + y^2 + z^2 = 18$$

que representa una relación no funcional y calculemos $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ *y* $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ *las derivadas de la función implicita en el punto (1,1,4).*

Las derivadas de la función implicita las podemos calcular de 3 formas:
1) Aplicando la conclución anterior

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{2x}{2z} = -\frac{x}{z} \quad \text{luego} \quad \frac{\partial z}{\partial x}(1,1) = -\frac{1}{4}$$

y

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{2y}{2z} = -\frac{y}{z} \quad \text{luego} \quad \frac{\partial z}{\partial y}(1,1) = -\frac{1}{4}$$

2) Aplicando diferenciales en ambos lados de la igualdad se tiene

$$d(x^2 + y^2 + z^2 - 18) = d(0)$$

para obtener

$$2xdx + 2ydy + 2zdz - 0 = 0$$

y despejando dz de la ecuación anterior se tiene que

$$2zdz = -2xdx - 2ydy$$

y así

$$dz = -\frac{x}{z}dx - \frac{y}{z}dy = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

luego

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}$$

3) Como z(x,y) es funcion de x y de y derivamos la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2(x,y) = 18$$

con respecto a x y con respecto a y para obtener

$$2x + 0 + 2z\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad \text{y así} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}$$

y

$$0 + 2y + 2z\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad \text{y así} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}$$

Ejemplo 3.11 *Supongamos que $z = f(x, y)$ satisface la ecuación*

$$x^2z^2 + xy^2 - z^3 + 4yz - 5 = 0$$

hallar $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ de 3 formas diferentes :

1)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{2xz^2 + y^2}{2x^2z - 3z^2 + 4y}$$

y

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{2xy + 4z}{2x^2z - 3z^2 + 4y}$$

2) Como z depende de x y de y derivamos la ecuación

$$x^2z^2 + xy^2 - z^3 + 4yz - 5 = 0$$

con respecto a x para obtener

$$2xz^2 + x^2 2z\frac{\partial z}{\partial x} + y^2 - 3z^2\frac{\partial z}{\partial x} + 4y\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

entonces

$$(3z^2 - x^2 2z - 4y)\frac{\partial z}{\partial x} = 2xz^2 + y^2$$

luego

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2xz^2 + y^2}{3z^2 - x^2 2z - 4y} = -\frac{2xz^2 + y^2}{x^2 2z - 3z^2 + 4y}$$

y si derivamos la ecuación

$$x^2z^2 + xy^2 - z^3 + 4yz - 5 = 0$$

con respecto a y obtenemos

$$x^2 2z\frac{\partial z}{\partial y} + 2xy - 3z^2\frac{\partial z}{\partial y} + 4(z + y\frac{\partial z}{\partial y}) = 0$$

entonces

$$2xy + 4z = (3z^2 - 4y - 2x^2 z)\frac{\partial z}{\partial y}$$

y así

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2xy + 4z}{3z^2 - 4y - 2x^2 z} = \frac{2xy + 4z}{2x^2 z - 3z^2 + 4y}$$

3) Aplicando diferenciales

$$d(x^2 z^2 + xy^2 - z^3 + 4yz - 5) = d(0)$$

y aplicando las propiedades de la diferencial obtenemos

$$2xz^2 dx + 2zx^2 dz + y^2 dx + 2xydy - 3z^2 dz + 4ydz + 4zdy = 0$$

y agrupando dx dy y dz obtenemos

$$(2xz^2 + y^2)dx + (2xy + 4z)dy = (-2zx^2 + 3z^2 - 4y)dz$$

luego

$$dz = \frac{2xz^2 + y^2}{-2zx^2 + 3z^2 - 4y}dx + \frac{2xy + 4z}{-2zx^2 + 3z^2 - 4y}dy = -\frac{2xz^2 + y^2}{2zx^2 - 3z^2 + 4y}dx - \frac{2xy + 4z}{2zx^2 - 3z^2 + 4y}dy$$

luego $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2xz^2 + y^2}{2zx^2 - 3z^2 + 4y}$ y $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2xy + 4z}{2zx^2 - 3z^2 + 4y}$

Si $F(x, y, z) = 0$ y $x = f(y, z)$ o $y = f(x, z)$ el tratado es muy análogo

Ejemplo 3.12 *La ecuación*

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xz - z + 8 = 0$$

define a z como función de x y de y, hallar $d^2 z$

En efecto:

$$4xdx + 4ydy + 2zdz - 8xdz - 8zdx - dz = 0$$

es decir

$$(4x - 8z)dx + 4ydy = (-2z + 8x + 1)dz$$

luego

$$dz = \frac{4x-8z}{-2z+8x+1}dx + \frac{4.y}{-2z+8x+1}dy$$

$$d^2z = d\left(\frac{4x-8z}{-2z+8x+1}dx + \frac{4y}{-2z+8x+1}dy\right) =$$

$$= d\left(\frac{4x-8z}{-2z+8x+1}dx\right) + d\left(\frac{4y}{-2z+8x+1}dy)\right) =$$

$$= d\left(\frac{4x-8z}{-2z+8x+1}\right)dx + \frac{4x-8z}{-2z+8x+1}d(dx) +$$

$$d\left(\frac{4y}{-2z+8x+1}\right)dy + \frac{4y}{-2z+8x+1}d(dy) =$$

$$= \quad d\left(\frac{4x-8z}{-2z+8x+1}\right)dx + 0 + d\left(\frac{4y}{-2z+8x+1}\right)dy + 0 =$$

$$= \quad d\left(\frac{4x-8z}{-2z+8x+1}\right)dx + d\left(\frac{4y}{-2z+8x+1}\right)dy =$$

$$= \quad \frac{\left[(-2z+8x+1)(4dx-8dz) - (4x-8z)(-2dz+8dx)\right]dx}{(-2z+8x+1)^2}$$

$$+\frac{\left[(-2z+8x+1)4dy - 4y(-2dz+8dx)\right]dy}{(-2z+8x+1)^2}$$

y si $x = 2$, $y = 0$, $z = 1$, entonces muestre que $dz = 0$ y

$$d^2z = \frac{\left[(-2+16+1)(4dx-8.0) - (8-8)(-2.0+8dx)\right]dx}{(15)^2} +$$

$$\frac{\left[(-2+16+1)4dy - 4.0(-2.0+8dx)\right]dy}{(15)^2} = \frac{4(dx)^2}{15} + \frac{4(dy)^2}{15} = \frac{4}{15}\left[(dx)^2 + (dy)^2\right]$$

Ejemplo 3.13 *La ecuacíon*

$$F(x-az, y-bz) = 0$$

con F una funcíon diferenciable, define a z como función de x y de y. Demostrar que

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

En efecto: Como z es función de x y de y entonces derivando con respecto a x la ecuación

$$F(x-az, y-bz) = F(A(x,y), B(x,y)) = 0$$

se tiene que

$$\frac{\partial F}{\partial A}\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial B}\frac{\partial B}{\partial x} = D_1F(1-a\frac{\partial z}{\partial x}) + D_2F(-b\frac{\partial z}{\partial x}) = 0$$

entonces despejando $\frac{\partial z}{\partial x}$ *de la ecuación anterior se tiene que*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{D_1F}{aD_1F + bD_2F}$$

y derivando con respecto a y la ecuación

$$F(A(x,y), B(x,y)) = 0$$

obtenemos

$$\frac{\partial F}{\partial A}\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial B}\frac{\partial B}{\partial y} = D_1F(-a\frac{\partial z}{\partial y}) + D_2F(1-b\frac{\partial z}{\partial y}) = 0$$

y despejando $\frac{\partial z}{\partial y}$ *de la ecuación anterior se tiene que*

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{D_2F}{aD_1F + bD_2F}$$

por lo tanto

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{aD_1F}{aD_1F + bD_2F} + \frac{bD_2F}{aD_1F + bD_2F} = \frac{aD_1F + bD_2F}{aD_1F + bD_2F} = 1$$

En forma análoga, demuestre que si

$$F\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0$$

entonces

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$$

Ejemplo 3.14 *Si*

$$x = u\cos v,\ \ y = u\sin v,\ \ z = u^2$$

Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$ *y* $\frac{\partial z}{\partial y}$

En efecto:

$$x^2 + y^2 = (u\cos v)^2 + (usinv)^2 = u^2\left(\cos^2 v + \sin^2 v\right) = u^2 = z$$

por lo tanto

$$z = x^2 + y^2$$

luego

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y$$

Ahora si aplicamos diferenciales

$$dz = 2udu,\ dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv = \cos v du - u\sin v dv,\ dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv = \sin v du + u\cos v dv$$

y de las ecuaciones

$$dx = \cos v du - u\sin v dv \qquad dy = \sin v du + u\cos v dv$$

despejamos du, se obtiene

$$du = \cos v dx + \sin v dy$$

y reemplazamos en

$$dz = 2udu = 2u\cos v dx + 2u\sin v dy = 2xdx + 2ydy = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

luego

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y$$

En forma general si

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v) \quad \text{y} \quad z = z(u,v)$$

Hallar $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$

Ejercicio 7 *Solucionar los ejercicios siguientes*

1. Si

$$x = u + v,\ y = u^2 + v^2,\ z = u^3 + v^3 \text{ con } u \neq -v$$

Mostrar que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -3uv \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3}{2}(u+v)$$

2. La ecuación

$$x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y + 3 = 0$$

define a z como una función implicita de x y de y, mostrar que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x^2 - yz}{xy - z^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{6y^2 - 3xz - 2}{3(xy - z^2)}$$

3. Si

$$F\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0$$

define a z como una función implicita de x y de y, mostrar que

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$$

4. Las tres ecuaciones

$$F(u, v) = 0,\ u = xy,\ v = \sqrt{x^2 + z^2}$$

definen una superficie en el espacio xyz. Hallar un vector normal a esa superficie en el punto $x = 1,\ y = 1,\ \ z = \sqrt{3}$, si se sabe que $D_1F(1, 2) = 1,\ D_2F(1, 2) = 2$
Respuesta $N = (2, 1, \sqrt{3})$

5. La ecuación

$$x + z + (y + z)^2 = 6$$

define a z como una función implícita de x y de y, mostrar que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-1}{2y + 2z + 1} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-2(y + z)}{2y + 2z + 1} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{2}{(2y + 2z + 1)^3}$$

6. La ecuación

$$F(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

define a z como una función implícita de x y de y, mostrar que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{D_1F + 2xD_2F}{D_1F + 2zD_2F} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{D_1F + 2yD_2F}{D_1F + 2zD_2F}$$

7. La ecuación

$$F(x, y, z) = 0$$

define a z como una función implícita de x y de y, mostrar que si $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial z \partial x}$ entonces

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{\dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2}\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2 - 2\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}\dfrac{\partial F}{\partial z}\dfrac{\partial F}{\partial x} + \left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)^2 \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)^3}$$

8 Si $x = u+v, \quad y = u-v, \quad z = u^2$ Demostrar que $dz = udx + udy$ por tanto $\dfrac{\partial z}{\partial x} = u$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y} = u$

3.3 Planos Tangentes y Rectas Normales

Sea $F(x, y, z) = 0$ la ecuación que representa una superficie, con primeras derivadas parciales continuas y (x_0, y_0, z_0) un punto de la gráfica de $F(x, y, z) = 0$, en donde $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Si $\alpha(t)$ es una curva diferenciable sobre esta superficiecon $\alpha(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$ *entonces*

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \bullet \alpha'(t_0) = 0$$

es decir, $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ y $\alpha'(t_0)$ son ortogonales, por lo tanto $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ es un vector normal a la superficie representada por la ecuación $F(x, y, z) = 0$.

En efecto : Como $\alpha(t)$ está sobre la superficie representada por la ecuación $F(x, y, z) = 0$, entonces

$$F(\alpha(t)) = 0$$

luego

$$\frac{d}{dt}(F(\alpha(t))) = \nabla F(\alpha(t)) \bullet \alpha'(t) = 0$$

Ejemplo 3.15 *Si $z = 1$ entonces $z - 1 = F(x, y, z) = 0$, luego un vector normal a la superficie representada por $z = 1$, es*

$$\nabla F(x, y, z) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right) = (0, 0, 1)$$

Ejemplo 3.16 *Si $x + y + 3z - 20 = F(x, y, z) = 0$, entonces un vector normal al plano es*

$$\nabla F(x, y, z) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right) = (1, 1, 3)$$

Ejemplo 3.17 *Si*

$$z = x^2 + y^2 \quad entonces \quad x^2 + y^2 - z = 0 = F(x, y, z)$$

y un vector normal a la superficie del paraboloide es

$$\nabla F(x, y, z) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right) = (2x, 2y, -1) \quad o \quad (-2x, -2y, 1)$$

Ejemplo 3.18 *Si*

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad entonces \quad \sqrt{x^2 + y^2} - z = 0 = F(x, y, z)$$

y un vector normal a la superficie del cono es

$$\nabla F(x, y, z) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right) = (\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -1)$$

Ejemplo 3.19 *Si $x = 1$ entonces $x - 1 = F(x, y, z) = 0$ luego un vector normal a la superficie representada por $x = 1$ es*

$$\nabla F(x, y, z) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right) = (1, 0, 0)$$

Ejemplo 3.20 *Hallar la ecuación del plano tangente y de la recta normal a la superficie representada por*

$$x^2 + y^2 + z^2 = 6 \text{ en el punto } (-1, 2, 1)$$

En efecto: El vector normal del plano es el vector $\nabla F(-1, 2, 1)$ que es el vector dirección de la recta.

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 6 = 0$$

entonces

$$\nabla F(x, y, z) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right) = (2x, 2y, 2z), \quad \nabla F(-1, 2, 1) = (-2, 4, 2)$$

luego la ecuación del plano tangente a la superficie en el punto $(-1, 2, 1)$ es

$$\nabla F(-1, 2, 1) \bullet (X - P_0) = (-2, 4, 2) \bullet ((x, y, z) - (-1, 2, 1)) = 0 = (-2, 4, 2) \bullet (x+1, y-2, z-1)$$

es decir

$$-2(x + 1) + 4(y - 2) + 2(z - 1) = 0$$

y la ecuación de la recta normal es

$$\frac{x + 1}{-2} = \frac{y - 2}{4} = \frac{z - 1}{2}$$

Ejemplo 3.21 *Hallar la ecuación del plano tangente y de la recta normal a la superficie representada por*

$$z = x^2 + y^3 \quad \text{en el punto (1,2,9)}$$

En efecto: El vector normal del plano es el vector $\nabla F(1, 2, 9)$ *que es el vector diecciión de la recta.*

$$F(x, y, z) = x^2 + y^3 - z = 0$$

entonces

$$\nabla F(x, y, z) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right) = \left(2x, 3y^2, -1\right), \quad \nabla F(1, 2, 9) = (2, 12, -1)$$

luego la ecuación del plano tangente a la superficie en el punto $(1, 2, 9)$ *es*

$$\nabla F(1, 2, 9) \bullet (X - P_0) = (2, 12, -1) \bullet ((x, y, z) - (1, 2, 9)) = 0 = (2, 12, -1) \bullet (x-1, y-2, z-9)$$

es decir

$$2(x - 1) + 12(y - 2) - (z - 9) = 0$$

y la ecuación de la recta normal es

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{12} = \frac{z-9}{-1}$$

Ejemplo 3.22 *Hallar la ecuación del plano tangente y de la recta normal a la superficie representada por*

$$xyz = 12 \text{ en el punto } (2, -2, -3)$$

En efecto: El vector normal del plano es el vector $\nabla F(2, -2, -3)$ *que es el vector dirección de la recta.*

$$F(x, y, z) = xyz - 12 = 0$$

entonces

$$\nabla F(x, y, z) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right) = (yz, xz, xy) \text{ luego } \nabla F(2, -2, -3) = (6, -6, -4)$$

luego

$$6(x - 2) - 6(y + 2) - 4(z + 3) =$$

es la ecuación del plano tangente y

$$\frac{x-2}{6} = \frac{y+2}{-6} = \frac{z+3}{-4}$$

es la ecuación de la recta normal

Ejemplo 3.23 *Hallar los puntos de la superficie*

$$z = 3xy - x^3 - y^3$$

en que el plano tangente es horizontal. En efecto el plano tangente es horizontal donde $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$ *y,* $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ *luego*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3y - 3x^2 = 0 \quad ssi\ y = x^2$$

y

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x - 3y^2 = 0 \quad ssi\ x = y^2$$

por lo tanto $y = x^2 = y^4$, *es decir,* $y - y^4 = y(1 - y^3) = y(1 - y)(1 + y + y^2) = 0$, *luego* $y = 0$ *y* $y = 1$, *y así* $x = 0$, $x = 1$ *luego los puntos son* $(0, 0, 0), (1, 1, 1)$

3.4 Máximos y Mínimos

3.4.1 Introducción

En esta sección extenderemos las técnicas para encontrar los valores extremos de una función de una variable, a funciones de dos o más variables :

3.4.2 Definicion de máximo absoluto

Si $f: \ R^n \rightarrow \ R$ entonces f tiene un máximo absoluto en $x = a$ sii

$$f(x) \leq f(a) \ \text{ para todo x} \in D_f \ \text{ y su valor es } f(a)$$

Ejemplo 3.24

$$f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$$

tiene un máximo absoluto en $(x, y) = (0, 0)$ *y su valor es* $f(0, 0) = 4$, *pues*

$$f(x, y) = 4 - x^2 - y^2 \ \leq f(0, 0) = 4, \ \textit{para todo } (x, y) \in R^2 = D_f$$

Ejemplo 3.25

$$f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

tiene un máximo absoluto en $(x, y) = (0, 0)$ *y su valor es* $f(0, 0) = 2$ *pues*

$$f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \ \leq f(0, 0) = 2, \ \textit{para todo } (x, y) \in D_f = \left\{(x, y)/x^2 + y^2 \leq 4\right\}$$

Ejemplo 3.26

$$f(x,y) = -\sqrt{x^2+y^2}$$

tiene un máximo absoluto en $(x,y) = (0,0)$ *y su valor es* $f(0,0) = 0$, *pues*

$$f(x,y) = -\sqrt{x^2+y^2} \ \leq f(0,0) = 0, \text{ para todo para todo } (x,y) \in R^2 = D_f$$

3.4.3 Definición de máximo relativo

Si $f: \ R^n \rightarrow \ R$ f tiene un máximo relativo en $x = a$ sii

$$f(x) \leq f(a) \text{ para todo x en una vecindad de } a \quad \text{y su valor es } f(a)$$

Ejemplo 3.27

$$f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$$

tiene un máximo relativo en $(x,y) = (0,0)$ *y su valor es* $f(0,0) = 4$ *pues*

$$f(x,y) = 4 - x^2 - y^2 \ \leq f(0,0) = 4,$$

para todo (x,y) *en el interior de la circunferencia* $x^2 + y^2 \leq 4$ *que es una vecindad de* $(0,0)$, $f(0,0) = 4$, *es también un máximo absoluto*

Ejemplo 3.28

$$f(x,y) = x(4-x)(x+4)$$

tiene un máximo relativo en $(x,y) = (2,y)$ *con* $y \in R$ *y su valor es* $f(2,y) = 24$, *pues*

$$f(x,y) = x(4-x)(x+4) \ \leq f(2,y) = 24, \text{ para todo (x,y) en } 0 < x < 4 \quad y \quad y \in R$$

que es una vecindad de $(2,y)$

3.4.4 Definición de mínimo absoluto

Si $f: \ R^n \rightarrow \ R$ f tiene un mínimo absoluto en $x = a$ sii

$$f(x) \geq f(a) \text{ para todo } x \in D_f \text{ y su valor es } f(a)$$

y f tiene un mínimo relativo en $x = a$ sii

$$f(x) \geq f(a) \text{ para todo x en una vecindad de a} \quad \text{y su valor es } f(a)$$

Ejemplo 3.29

$$f(x,y) = x(4-x)(x+4)$$

tiene un mínimo relativo en $(x,y) = (-2,y)$ *con* $y \in R$ *y su valor es* $f(-2,y) = -24$, *pues*

$$f(x,y) = x(4-x)(x+4) \ \geq f(-2,y) = -24, \text{ para todo } (x,y) = (-2,y) \ \text{ y } y \in R$$

Ejemplo 3.30

$$f(x,y) = |x| \ + |y|$$

tiene un mínimo absoluto en $(x,y) = (0,0)$ *y su valor es* $f(0,0) = 0$, *pues*

$$f(x,y) = |x| \ + |y| \geq f(0,0) = 0, \text{ para todo } (x,y) \in R^2 = D_f$$

pero también se puede considerar como un mínimo relativo, si se toma como vecindad de $(0,0)$, *por ejemplo el interior de* $|x| + |y| \leq 3$ *o el interior de* $|x| + |y| \leq 4$ *etc*

Ejemplo 3.31

$$f(x,y) = x^2y^2$$

tiene un mínimo absoluto en $(x,y) = (0,0)$ *y su valor es* $f(0,0) = 0$, *pues*

$$f(x,y) = x^2y^2 \geq f(0,0) = 0, \text{ para todo (x,y)} \in R^2 = D_f$$

pero también se puede considerar como un mínimo relativo, si se toma como vecindad de $(0,0)$, *por ejemplo el interior de* $|x| + |y| \leq 3$ *o el interior de* $x^2 + y^2 \leq 4$ *etc. También*

$$f(x,y) = x^2y^2 \geq f(x,0) = 0, \text{ para todo } (x,y) \in R^2 = D_f$$

$$f(x,y) = x^2y^2 \geq f(0,x) = 0, \text{ para todo } (x,y) \in R^2 = D_f$$

luego en $(x,0)$ *y en* $(0,x)$ *hay mínimo absoluto*

3.4.5 Definición de Extremos

Los Extremos de una función son el valor del máximo o el valor del mínimo.

Si f tiene un extremo en $x = a$, entonces a es un punto crítco o a es un punto frontera

3.4.6 Definición de punto crítco

Sea $a \in D_f$, se dice que a es un punto crítico de una función sii $\nabla f(a) = 0$ y en este caso se dice que a es un punto estacionario o f no es diferenciable en a y en este caso a es un punto singular.

Para hallar los extremos de una función lo primero que se hace es buscar los puntos critcos y los puntos frontera y buscar algún criterio para analizar si hay extremos o no . Si a es un punto estacionario, para hallar los extremos de la función se utilizará el criterio de la matriz Hessiana

3.4.7 Definición de Matriz Hessiana

La matriz Hessiana para una función $f: R^3 \to R$ se define y se nota por

$$H(x,y,z) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 3.32 *Sea*

$$f(x,y) = x^2 y$$

entonces

$$H(x,y,z) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 0 \end{bmatrix}$$

3.4.8 Criterio de la matriz Hessiana

Sea $a \in D_f$, a un punto estacionario de f, es decir, $\nabla f(a) = 0$, f con segundas derivadas parciales continuas en a y H(a) la matriz Hessiana, entonces

1) Si todos los valores propios de $H(a)$ son positivos, entonces f tiene un mínimo relativo en $x = a$ y su valor es $f(a)$

2) Si todos los valores propios de $H(a)$ son negativos , entonces f tiene un máximo relativo en $x = a$ y su valor es $f(a)$

3) Si los valores propios de $H(a)$ son negativos y positivos entonces hay punto de silla en $x = a$

4) En otro caso el criterio falla

Ejemplo 3.33 *Hallar los extremos de*

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

Esta función no tiene puntos frontera, ni puntos singulares, solo tiene puntos estacionarios, luego

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

y así

$$\nabla f(x,y) = (2x, 2y) = (0,0) \quad \text{sii} \quad x = 0 \;\; y \;\; y = 0$$

por tanto el punto estacionario es $a = (0, 0)$. La matriz Hessiana $H(x, y)$ viene dada por

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ luego } H(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

y los valores propios de $H(0, 0)$, son las raices de la ecuación

$$|H(0,0) - \lambda I| = 0, \text{ es decir } \left| \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 = 0 \text{ sii } \lambda = 2$$

luego los valores propios de $H(0, 0)$ son todos positivos, así que en $(x, y) = (0, 0)$, hay un mínimo relativo y su valor es $f(0, 0) = 0$

Ejemplo 3.34 *Hallar los extremos de*

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$$

Esta función no tiene puntos frontera, ni puntos singulares, solo tiene puntos estacionarios, luego

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 + 3x$$

y así

$$\nabla f(x, y) = (3x^2+3y, 3y^2+3x) = (0, 0) \text{ sii } 3x^2+3y = 0 \text{ y } 3y^2+3x = 0 \text{ sii } x^2+y = 0 \text{ y } y^2+x = 0$$

por tanto $y = -x^2$ y así $y^2 + x = x^4 + x = 0 = x(x + 1)(x^2 - x + 1)$, luego $x = 0$ y $x = -1$ y como $y = -x^2$, entonces $y = 0$, y, $y = -1$, luego los puntos estacionarios son $(0, 0)$ y $(-1, -1)$. La matriz Hessiana $H(x, y)$ viene dada por

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x & 3 \\ 3 & 6y \end{bmatrix}$$

Los valores propios de $H(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, son las raices de la ecuación

$$|H(0,0) - \lambda I| = 0, \text{ es decir } \left| \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} -\lambda & 3 \\ 3 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9 = 0 \text{ sii } \lambda = \pm 3$$

luego los valores propios de $H(0,0)$ son todos positivos y negativos, así que en $(x,y) = (0,0)$ hay un punto de silla

Los valores propios de $H(-1,-1)$, son las raices de la ecuación

$$|H(-1,-1)-\lambda I| = 0, \text{ es decir } \left| \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} -6-\lambda & 3 \\ 3 & -6-\lambda \end{vmatrix} = (6+\lambda)^2 - 9 = 0$$

$$sii \;\; (6+\lambda-3)6+\lambda+3) = 0 \text{ sii } \lambda = -3 \text{ y } \lambda = -9$$

luego los valores propios de $H(-1,-1)$ son todos negativos, así que en $(x,y) = (-1,-1)$, hay un máximo relativo y su valor es $f(-1,-1)$

Ejemplo 3.35 *Hallar los extremos de*

$$f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$$

Esta función no tiene puntos frontera, ni puntos singulares, solo tiene puntos estacionarios, luego

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 6xy - 12$$

y así

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= (3x^2+3y^2-15, 6xy-12) = (0,0) \quad \text{sii } \; 3x^2+3y^2-15 = 0 \quad \text{ y} \\ 6xy - 12 &= 0 \;\text{ sii } x^2+y^2-5 = 0 \;\text{ y }\; xy-2 = 0 \end{aligned}$$

por tanto

$$y = \frac{2}{x} \;\text{ y así }\; x^2+y^2-5 = 0 = x^2 + \left(\frac{2}{x}\right)^2 - 5 = 0 = x^4 - 5x^2 + 4 = 0 = \left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right) = 0$$

entonces $x = \pm 1$ y $x = \pm 2$ y como $y = \dfrac{2}{x}$ se tiene que $(1,2), (-1,-2), (2,1), (-2,-1)$ son los puntos estacionarios:

La matriz Hessiana $H(x,y)$ viene dada por

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{bmatrix} \qquad \text{luego}$$

1)

$$H(1,2) = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{bmatrix}$$

los valores propios de $H(1,2)$, son las raices de la ecuación

$$|H(1,2)-\lambda I|=0, \text{ es decir } \left| \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 12 \\ 12 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)^2 - 144 = 0$$

$$sii \ (6\text{-}\lambda-12)(6-\lambda+12)=0 \text{ sii } \lambda=-6 \text{ y } \lambda=18$$

que son números Reales son positivos y negativos, por lo tanto hay punto de silla en $(1,2,f(1,2))$

2)

$$H(-1,-2) = \begin{bmatrix} -6 & -12 \\ -12 & -6 \end{bmatrix}$$

los valores propios de $H(-1,-2)$, son las raices de la ecuación

$$\begin{aligned} |H(-1,-2)-\lambda I| &= 0, \text{ es decir } \left| \begin{bmatrix} -6 & -12 \\ -12 & -6 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} -6-\lambda & -12 \\ -12 & -6-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (6+\lambda)^2 - 144 = 0 \ \ sii \ (6+\lambda-12)(6+\lambda+12)=0 \text{ sii } \lambda=6 \text{ y } \lambda=-18 \end{aligned}$$

que son números Reales positivos y negativos, por lo tanto hay punto de silla en $(-1,-2,f(-1,-2))$

3)

$$H(2,1) = \begin{bmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$$

los valores propios de $H(2,1)$, son las raices de la ecuación

$$|H(2,1)-\lambda I|=0, \text{ es decir } \left| \begin{bmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 12-\lambda & 6 \\ 6 & 12-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(12-\lambda)^2 - 36 = 0 \ \ sii \ (6-\lambda)(18-\lambda)=0 \text{ sii } \lambda=6 \text{ y } \lambda=18$$

luego los valores propios son todos positivos, por lo tanto hay mínimo relativo en $(2,1)$ y su valor es $f(2,1)$

4)

$$H(-2,-1) = \begin{bmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -12 \end{bmatrix}$$

los valores propios de $H(-2,-1)$, son las raices de la ecuación

$$|H(-2,-1)-\lambda I|=0, \text{ es decir } \left| \begin{bmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -12 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} -12-\lambda & -6 \\ -6 & -12-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(12+\lambda)^2 - 36 = 0 \ sii \ (6+\lambda)(18+\lambda)=0 \text{ sii } \lambda=-6 \text{ y } \lambda=-18$$

son números Reales todos negativos, por lo tanto hay máximo relativo en $(-2,-1)$ y su valor es $f(-2,-1)$

Recordemos que si f(x) es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ entonces f tiene máximo y mínimo absoluto en el intervalo. En forma análoga si $f(x,y)$ es una función continua en conjunto cerrado y acotado del plano xy, entonces $f(x,y)$ tiene máximo y mínimo absoluto en el conjunto.

Ejemplo 3.36 *Hallar los extremos de*

$$f(x,y)=x^2+y^2-2x-2y \quad \textit{en} \quad Q=\left\{(x,y)/x^2+y^2\leq 4\right\}$$

1) Buscamos los puntos estacionarios que son interiores a Q

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x-2=0 \text{ sii } x=1 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=2y-2=0 \text{ sii } y=1$$

por tanto $(x,y)=(1,1)$ es un punto estacionario en el interior de Q

2) Examinamos la función en la frontera $x^2+y^2=4$. Para ello parametrizamos la curva $x^2+y^2=4$ como, $\alpha(t)=(2\cos t,2\sin t)$ $0\leq t\leq 2\pi$, por lo tanto

$$h(t)=f(x,y)=f(2\cos t,2\sin t)=4-4\cos t-4\sin t \qquad 0\leq t\leq 2\pi$$

y hallamos los puntos críticos y frontera de esta función, luego

$$h'(t)=4\sin t-4\cos t=0 \text{ sii } \quad \sin t=\cos t \text{ sii } t=\frac{\pi}{4},\, t=\frac{5\pi}{4}$$

que son $t=\frac{\pi}{4}$, $t=\frac{5\pi}{4}$ y los extremos $t=0$, $t=2\pi$.

Como $(x,y)=(2\cos t,2\sin t)$ entonces

$$(x,y)=\left(2\cos\frac{\pi}{4},2\sin\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{2\sqrt{2}}{2},\frac{2\sqrt{2}}{2}\right)=\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$$

$$(x,y)=\left(2\cos\frac{5\pi}{4},2\sin\frac{5\pi}{4}\right)=\left(\frac{-2\sqrt{2}}{2},\frac{-2\sqrt{2}}{2}\right)=\left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$$

$$(x,y)=(2\cos 0,2\sin 0)=(2,0) \qquad (x,y)=(2\cos 2\pi,2\sin 2\pi)=(2,0)$$

por tanto los extremos de

$$f(x,y)=x^2+y^2-2x-2y \quad \text{en} \quad Q=\left\{(x,y)/x^2+y^2\leq 4\right\}$$

se hallan en $(1,1), \left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right), \left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right), (2,0)$ y para saber cual es el máximo y el minimo, evaluamos la función en cada punto así

$$f(1,1) = 1+1-2-2 = -2, \quad f\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right) = 4-4\sqrt{2} \quad f\left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right) = 4+4\sqrt{2} \text{ y } f(2,0) = 0$$

luego el máximo absoluto es $4+4\sqrt{2}$ y ocurre en $\left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$ y el mínimo absoluto es -2 y ocurre en $(1,1)$

Ejemplo 3.37 *Hallar los extremos de*

$$f(x,y) = x^2 + y^2 \quad en \quad Q = \left\{(x,y)/x^2+y^2 \leq 4\right\}$$

1) Buscamos los puntos estacionarios que son interiores a Q

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0 \text{ sii } x = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0 \text{ sii } y = 0$$

por tanto $(x,y) = (0,0)$ es un punto estacionario en el interior de Q

2) Examinamos la función en la frontera $x^2+y^2 = 4$. Para ello parametrizamos la curva curva $x^2+y^2 = 4$ como $\alpha(t) = (2\cos t, 2\sin t)$ $0 \leq t \leq 2\pi$ por lo tanto

$$h(t) = f(x,y) = f(2\cos t, 2\sin t) = 4 \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

y hallamos los puntos críticos y frontera de esta función, luego

$$h'(t) = 0 \text{ para todo t} \in (0,2\pi)$$

por tanto los puntos criticos son $(0,0)$, $(x,y) = (2\cos t, 2\sin t)$ $0 < t < 2\pi$ y $(2,0)$ cuando $t = 0$ y $t = 2\pi$.

El valor del mínimo absoluto ocurre en $(0,0)$ con valor de $f(0,0) = 0$ y el maximo absoluto ocurre en $(x,y) = (2\cos t, 2\sin t)$ con $0 \leq t \leq 2\pi$ y su valor es $f(2\cos t, 2\sin t) = 4$

Ejemplo 3.38 *Hallar el máximo absoluto y el mínimo absoluto de la función*

$$f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y$$

en el rectángulo limitado por $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$, $y = 2$

Este conjunto es cerrado y acotado, f es diferenciable en él, por lo tanto f es continua, entonces f tiene máximo absoluto y el mínimo absoluto

Los puntos críticos son los puntos frontera y los puntos estacionarios, por tanto

1)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y = 0 \text{ sii } x = y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -2x + 2 = 0 \text{ sii } x = 1 \text{ entonces } (x, y) = (1, 1)$$

es el punto estacionario y está en el interior del rectángulo

2) Examinamos la función en la frontera, y para ello parametrizamos cada curva frontera

a) si $y = 0$

$$f(x, 0) = g(x) = x^2 - 0 + 0 = x^2 \quad 0 \leq x \leq 3, \quad f'(x) = 0 \; sii \quad x = 0$$

luego $(0, 0), (3, 0)$ son puntos frontera

b) Si $x = 0$

$$f(0, y) = g(y) = 2y \qquad 0 \leq y \leq 2$$

luego $(0, 0), (0, 2)$, son puntos frontera.

c) si $x = 3$

$$f(3, y) = g(y) = 9 - 6y + 2y = 9 - 4y \qquad 0 \leq y \leq 2$$

y $(3, 0), (3, 2)$ son puntos frontera.

d) Si $y = 2$

$$f(x, 2) = g(x) = x^2 - 4x + 4 \qquad 0 \leq x \leq 3$$

entonces

$$f'(x) = 2x - 4 = 0 \text{ sii } x = 2$$

$; f(2, 2 = 0$, luego $(2, 2)$, es punto estacionario de esta función y $(0, 2), (3, 2)$, puntos frontera

Ahora

$$f(2, 2) = 0, \quad f(0, 2) = 4, \quad f(3, 2) = 1, \quad f(3, 0) = 9, \; , f(0, 2) = 4, f(0, 0) = 0 \quad f(1, 1) = 1$$

luego $f(3, 0) = 9$ es el máximo absoluto y el mínimo absoluto es $f(0, 0) = f(2, 2) = 0$

Ejemplo 3.39 *Hallar el máximo absoluto y el mínimo absoluto de la función*

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$$

en la región limitada por $x \leq 0, \quad y \leq 0, \; x + y \geq -3$

Este conjunto es cerrado y acotado, f es diferenciable en él, por lo tanto f es continua, entonces f tiene máximo absoluto y el mínimo absoluto

Los puntos críticos son los puntos frontera y los puntos estacionarios por tanto

1)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y + 1 = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - x + 1 = 0$$

entonces solucionando este sistema se tiene $(x, y) = (-1, -1)$ es el punto estacionario y está en el interior de la región

2) Examinamos la función en la frontera

a) si $y = 0$

$$f(x,0) = g(x) = x^2 + x \quad -3 \leq x \leq 0 \qquad g'(x) = 2x + 1 = 0 \text{ sii } x = -1/2$$

por tanto el punto critico es $(-1/2, 0)$ y $(0,0)$, $(-3,0)$ puntos frontera

b) Si $x = 0$

$$f(0,y) = g(y) = y^2 + y \quad -3 \leq y \leq 0 \quad g'(y) = 2y + 1 = 0 \text{ sii } y = -1/2$$

por tanto el punto critico es $(0, -1/2)$ y $(0,0), (0,-3)$ puntos frontera

c) si $x + y = -3$ entonces $y = -3 - x$

$$f(x,-3-x) = g(x) = x^2+(3+x)^2+x-3-x = 3x^2 + 9x+6 \quad g'(x) = 6x+9 = 0 \text{ sii } x = -3/2$$

luego $(-3/2, -3/2)$ es un punto estacionario y $(0,-3), (-3,0)$ puntos frontera

Ahora

$$f(-1/2,0) = -1/4, \ f(0,0) = 0, \ f(-3,0) = 6, f(0,-3) = 6, f(-3/2,-3/2) = \quad f(-1,-1) = -1$$

luego $f(-3,0) = 6 = f(0,-3)$ es el máximo absoluto y el mínimo absoluto es $f(-1,-1) = -1$

En resumen:

Para hallar los extremos absolutos de una función continua en una región cerrada y acotada entonces

1) Buscamos los puntos críticos de la función en el interior de la región, hallando los puntos donde el $\nabla f(x,y) = 0$ y donde f no es diferenciable

2)Hallamos los puntos frontera de la región donde f tiene extremos

3)Calculamos el valor de la función en cada punto hallado y el mayor valor es el máximo absoluto y el menor valor es el mínimo absoluto

Ejemplo 3.40 *Hallar el máximo y el mínimo de la función*

$$f(x,y) = \frac{x^2 + 2y^2}{(x+y)^2} \qquad x \neq -y$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{(x+y)^2 2x-(x^2+2y^2)2(x+y)}{(x+y)^4} = \frac{(x+y)\left[(x+y)2x-2(x^2+2y^2)\right]}{(x+y)^4} = \\ &= \frac{2x^2+2xy-2x^2-4y^2}{(x+y)^3} = \frac{2y(x-2y)}{(x+y)^3}\end{aligned}$$

En forma análoga

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2x(2y-x)}{(x+y)^3} = 0 \text{ sii } \ x=2y$$

por tanto

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2y(x-2y)}{(x+y)^3} = 0 \text{ sii } \ x=2y$$

asi el punto critico es $x = 2y$ y para analizar si hay máximo o mínimo aplicaremos la definición y suponemos que

$$\begin{aligned} f(x,y)-f(2y,y) &\geq 0 \ \text{ luego } \ \frac{x^2+2y^2}{(x+y)^2} - \frac{4y^2+2y^2}{(3y)^2} \geq 0 \ sii \ \frac{x^2+2y^2}{(x+y)^2} - \frac{6y^2}{9y^2} \geq 0 \\ \text{sii } \frac{x^2+2y^2}{(x+y)^2} - \frac{2}{3} &\geq 0 \text{ sii } \frac{x^2+2y^2}{(x+y)^2} \geq \frac{2}{3} \ sii \ 3x^2+6y^2 \geq 2(x^2+2xy+y^2) \ \text{ sii } \ x^2-4xy+4y^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{sii } \ (x-2y)^2 \geq 0 \quad \text{luego}$$

$$f(x,y)-f(2y,y) = (x-2y)^2 \geq 0 \ \text{ y así } \ f(x,y)-f(2y,y) \geq 0$$

por tanto

$$f(x,y) \geq f(2y,y)$$

entonces

$$f(x,y) = \frac{x^2+2y^2}{(x+y)^2} \qquad x \neq -y$$

tiene un mínimo en $(x,y) = (2y,y)$ y su valor es $f(2y,y) = \frac{2}{3}$

Ejemplo 3.41 *Hallar los extremos de la función*

$$f(x,y) = x^2y^3(x+y-1) = x^3y^3 + x^2y^4 - x^2y^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^3 + 2xy^4 - 2xy^3 = xy^3(3x+2y-2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^3y^2 + 4x^2y^3 - 3x^2y^2 = x^2y^2(3x+4y-3)$$

por tanto la solución del sistema de ecuaciones

$$xy^3(3x+2y-2)=0 \ \ y \ x^2y^2(3x+4y-3)=0 \ \ es \ (x,0),(0,y), \ \left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$$

Para el punto $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$, *se aplica el criterio de la matriz Hessiana*

$$H(x,y)=\begin{bmatrix} 6xy^3+2y^4-2y^3 & 9x^2y^2+8xy^3-6xy^2 \\ 9x^2y^2+8xy^3-6xy^2 & 6x^3y+12x^2y^2-6x^2y \end{bmatrix}$$

luego

$$H(\frac{1}{3},\frac{1}{2})=\begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

por tanto

$$\left|H\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)-\lambda I\right|=\begin{vmatrix} \frac{1}{8}-\lambda & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{9}-\lambda \end{vmatrix}=\left(\frac{1}{8}-\lambda\right)\left(\frac{1}{9}-\lambda\right)-\frac{1}{144}=0$$

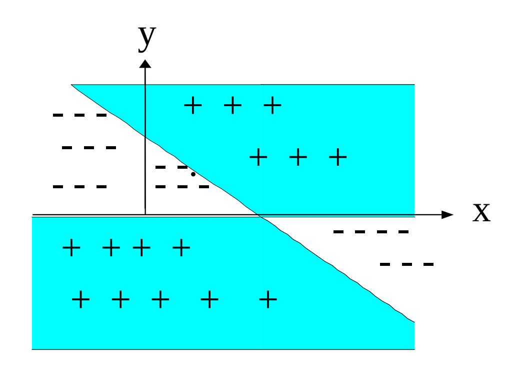
entonces $\lambda=\frac{17}{144}-\frac{1}{144}\sqrt{145}$, $\lambda=\frac{1}{144}\sqrt{145}+\frac{17}{144}$, *por tanto hay un mínimo en* $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$

Para $(x,0)$, $(0,y)$, se aplicará la definición
En efecto:

$f(x,y)-f(x,0)=f(x,y)-0=f(x,y)$ y miremos donde $f(x,y)=x^2y^3(x+y-1)\geq 0$

Como

$$f(x,y)=x^2y^3(x+y-1)=x^2y^2y(x+y-1)\geq 0 \text{ sii}$$
$$y\geq 0 \text{ y } \ (x+y-1)\geq 0 \text{ ó } \ y<0 \ \ y \ \ (x+y-1)<0$$



así que

$$f(x,y) - f(x,0) \geq 0 \text{ en la franja coloreada}$$

En los demás puntos

$$f(x,y) - f(x,0) < 0$$

luego en $(x,0)$ hay punto de silla, pues $f(x,y) > 0$ y $f(x,y) < 0$ en cada vecindad de $(x,0)$. En $(0,y)$ si $y<0$ y para $y>1$ $f(x,y) - f(0,y) = f(x,y) \geq 0$, luego hay mínimo, si $0<y<1$, $f(x,y)-f(0,y) = f(x,y) < 0$, luego hay máximo y para los puntos $(0,0)$ y $(0,1)$ hay punto de silla

Ejercicio 8 *Hallar los extremos de*

1. $$f(x,y) = \sin x + \sin y + \sin(x+y) \quad 0<x<\pi, 0<y<\pi \quad \text{Resp} \quad x=y=\frac{\pi}{3}, \ \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

2. $$f(x,y) = 2x^2 - 3xy^2 + y^4 = \left(y^2 - x\right)\left(y^2 - 2x\right) \quad \text{Resp punto de silla en } (0,0)$$

3. $$f(x,y) = e^x \cos y \quad \text{Resp no tiene extremos}$$

4. $$f(x,y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \quad \text{Resp mínimo en (1,1), 3}$$

5. $$f(x,y) = x^3 + y^3 - 6xy \quad \text{Resp } (0,0) \text{ punto silla, mínimo } (2,2), \ -8$$

6. $$f(x,y) = x^3 - 3x + y \quad \text{Resp no tiene extremos}$$

7. $$f(x,y) = (x-y+1)^2 \quad \text{Resp mínimo en } y = x+1$$

8. $$f(x,y) = \left(x^2+y^2\right) e^{-\left(x^2+y^2\right)} \quad \text{Resp máximo en } x^2+y^2=1, \text{ mínimo en } (0,0)$$

9. $$f(x,y) = (3-x)(3-y)(x+y-3) \quad \max (2,2), \text{ punto silla en } (0,3), (3,0), (3,3)$$

3.5 Multiplicadores de Lagrange

En esta sección se explica un método para hallar el valor del máximo o el valor del mínimo de una función con restricciones, que es el método de los multiplicadores de lagrange, y se presenta una variedad de ejemplos resueltos, al igual que una sección de ejercicios propuestos con sus debidas respuestas

Se llama extremo condicionado de una función $f(x,y)$, al valor del máximo o mínimo de esta función alcanzado con la condición de que sus variables estén ligadas entre si por la ecuación $g(x,y)=0$. Para hallar el extremo condicionado de la función $f(x,y)$ con la restricción $g(x,y)=0$ se forma la llamada función de Lagrange

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$$

donde λ es el multiplicador de lagrange y se buscan los extremos de $F(x,y)$.

Las condiciones necesarias para que haya un extremo se reducen al sistema de tres ecuaciones

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial g}{\partial x}=0$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial g}{\partial y}=0$$
$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}=g(x,y)=0$$

de las cuales se pueden deducir los valores de x, y y λ. Para probar que en este punto hay un extremo, se muestra que $d^2F<0$, para el máximo y $d^2F>0$ para el mínimo

Ejemplo 3.42 *La suma de dos números positivos es 8, halle los números para que su producto sea máximo*

En efecto, $f(x,y)=xy$ la función producto y la restricción es $g(x,y)=x+y-8$ la suma de los números, la función de Lagrange es

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)=xy+\lambda\,(x+y-8)$$

así

$$\frac{\partial F}{\partial x}=y+\lambda=0$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}=x+\lambda=0$$
$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}=x+y-8=0$$

luego de las dos primeras ecuaciones se tiene que $x = y$ y reemplazando en la tercera $x+x-8 = 2x-8 = 0$ sii $x = 4 = y$ luego $(x, y) = (4, 4)$. Para conocer el tipo de extremo calculamos

$$d^2F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(dx)^2+\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}dydx+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(dy)^2 = 0(dx)^2+2dxdy+0(dy)^2 = 2dxdy$$

Como $x + y - 8 = 0$ entonces $dx + dy = 0$, luego $dx = -dy$ entonces

$$d^2F(4, 4) = 2dxdy = -2(dx)^2 < 0$$

por tanto hay máximo en $(x, y) = (4, 4)$ y su valor es $F(4, 4) = f(4, 4) = 16$

Ejemplo 3.43 *Hallar los extremos de*

$$f(x, y) = 6 - 2x - 4y$$

con la condición de que sus variables satisfagan la condición

$$x^2 + y^2 = 1$$

En efecto: Geométricamente el problema se reduce a encontrar los valores máximo y mínimo de $f(x, y) = 6 - 2x - 4y$ en la intersección con el cilindro $x^2 + y^2 = 1$.La función de Lagrange es

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = 6 - 2x - 4y + \lambda\left(x^2 + y^2 - 1\right)$$

así

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -2 + 2\lambda x = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -4 + 2\lambda y = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

luego de las dos primeras ecuaciones se tiene que

$$\lambda x = 1 \text{ y } \lambda y = 2 \text{ entonces } \lambda = \frac{1}{x} = \frac{2}{y} \text{ por lo tanto } y = 2x \text{ entonces}$$

$$x^2 + y^2 - 1 = x^2 + 4x^2 - 1 = 5x^2 - 1 = 0 \qquad \text{luego } x = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}, \quad y = 2x = \pm 2\frac{\sqrt{5}}{5}$$

Para

$$x=\frac{\sqrt{5}}{5},\ y=\frac{2\sqrt{5}}{5},\qquad \lambda=\frac{1}{x}=\frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{5}}=\sqrt{5}=\frac{2}{y}\quad \text{y}$$

$$\begin{aligned} d^2F &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(dx)^2+\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}dydx+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(dy)^2=2\lambda(dx)^2+2\lambda(dy)^2= \\ &= 2\sqrt{5}(dx)^2+2\sqrt{5}(dy)^2>0 \end{aligned}$$

luego hay mínimo en $(x,y)=\left(\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$ y en $(x,y)=\left(-\frac{\sqrt{5}}{5},-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$ hay máximo pues

$$d^2F=2\lambda(dx)^2+2\lambda(dy)^2=-2\sqrt{5}(dx)^2-2\sqrt{5}(dy)^2<0$$

y el valor del máximo es

$$f\left(-\frac{\sqrt{5}}{5},-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)=6+\frac{2\sqrt{5}}{5}+\frac{8\sqrt{5}}{5}$$

y el valor del mínimo es

$$f\left(\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)=6-\frac{2\sqrt{5}}{5}-\frac{8\sqrt{5}}{5}$$

Ejemplo 3.44 *Hallar los extremos de*

$$f(x,y)=36-x^2-y^2 \quad \textit{si} \quad x+y=4$$

En efecto, la función de Lagrange es

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)=36-x^2-y^2+\lambda\left(x+y-4\right)$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}&=-2x+\lambda=0\\ \frac{\partial F}{\partial y}&=-2y+\lambda=0\\ \frac{\partial F}{\partial \lambda}&=x+y-4=0 \end{aligned}$$

luego de las dos primeras ecuaciones se tiene que

$$2x=2y=\lambda \quad \textit{por tanto} \quad x=y \quad \textit{luego} \quad x+y-4=2x-4=0 \ \textit{sii} \ x=2=y$$

asi geométricamente se puede observar que hay máximo en $x=2=y$ $(d^2F(2,2)<0)$ *y que su valor es* $F(2,2)=f(2,2)=36-4-4=28$

Ejemplo 3.45 *Hallar la mínima distancia del origen al plano*

$$x + y + z = 1$$

En efecto, la función a minimizar es

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

que es la distancia del origen al punto del plano (x, y, z). *En lugar de minimizar la función* $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, *minimizamos la función* $x^2+y^2+z^2$ *y a la respuesta obtenida le sacamos la raíz; luego la función de Lagrange es*

$$F(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+\lambda\,(x+y+z-1)$$

entonces

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + \lambda = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y + \lambda = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial z} = 2z + \lambda = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x + y + z - 1 = 0$$

de las dos primeras ecuaciones se tiene que

$$2x = 2y = 2z = -\lambda$$

por tanto $x = y = z$, *y así*

$$x + y + z - 1 = x + x + x - 1 = 3x - 1 = 0 \quad sii \;\; x = \frac{1}{3} = y = z$$

por tanto la distancia minima es

$$f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ejemplo 3.46 *Hallar las dimenciones de una caja inscrita en*

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

de tal forma que su volúmen sea mínimo

En efecto, la función de Lagrange es

$$F(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z) = 8xyz + \lambda\left(x^2+y^2+z^2-1\right)$$

entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= 8yz + 2\lambda x = 0\\
\frac{\partial F}{\partial y} &= 8xz + 2\lambda y = 0\\
\frac{\partial F}{\partial z} &= 8xy + 2z\lambda = 0\\
\frac{\partial F}{\partial \lambda} &= x^2+y^2+z^2-1
\end{aligned}$$

de las tres primeras ecuaciones se tiene que

$$\frac{8yz}{2x} = \frac{8xz}{2y} = \frac{8xy}{2z} = -\lambda \text{ por tanto } \frac{8yz}{2x} = \frac{8xz}{2y} \text{ entonces } y^2 = x^2 \text{ entonces}$$

$y = \pm x$ por tanto $y = x$ y como

$$\frac{8xz}{2y} = \frac{8xy}{2z} \text{ entonces } y^2 = z^2 \text{ entonces } y = \pm z \text{ por tanto } y = z$$

luego $(x,y,z) = (x,x,x)$ y así

$$x^2+y^2+z^2-1 = x^2+x^2+x^2-1 = 3x^2-1 = 0 \text{ entonces } x = \frac{\sqrt{3}}{3} = y = z$$

y así volúmen mínimo es

$$F\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 8\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3$$

Ejemplo 3.47 *Demostrar la desigualdad*

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz} \quad si \;\; x>0,\; y>0 \;\; z>0$$

En efecto, buscamos el máximo de $f(x,y,z) = xyz$ *si* $x+y+z=s$. *La función de lagrange es*

$$F(x,y,z,\lambda) = xyz + \lambda(x+y+z-s)$$

luego

$$\frac{\partial F}{\partial x} = yz + \lambda = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = xz + \lambda = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial z} = xy + \lambda = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x + y + z - s = 0$$

de las tres primeras ecuaciones se tiene que

$$yz = xz = xy = -\lambda$$

luego $y = x, z = y$ *así que* $(x, y, z) = (x, x, x)$ *por tanto*

$$x + y + z - s = 3x - s = 0 \text{ entonces } x = \frac{s}{3} = y = z \text{ luego}$$

$$V(x, y, z) = xyz = \left(\frac{s}{3}\right)^3 = \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 \geq f(x, y, z) = xyz$$

y asì

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$$

Ejemplo 3.48 *El plano* $x+y+z = 12$ *interseca al paraboloide* $z = x^2+y^2$ *en una elipse. Hallar el punto más alto y màs bajo de la elipse.*

En efecto, la funciòn de lagrange es

$$F(x, y, z, \lambda, u) = z + \lambda(x + y + z - 12) + u(x^2 + y^2 - z)$$

luego

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \lambda + 2ux = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = \lambda + 2u\,\text{y} = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial z} = 1 + \lambda - u = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x + y + z - 12 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} = x^2 + y^2 - z = 0$$

de las dos primeras ecuaciones se tiene que $x = y$ entonces $x^2 + y^2 - z = 2x^2 - z = 0$ luego $z = 2x^2$ luego

$$x + y + z - 12 = x + x + 2x^2 - 12 = 0 \text{ por tanto } x^2 + x - 6 = 0 = (x+3)(x-2)$$

$x = -3$ y $x = 2$ por lo tanto $(x, y, z) = (2, 2, 8)$, $(x, y, z) = (-3, -3, 18)$ y

$$F(2, 2, 8, \lambda, u) = 8, \qquad F(-3., -3, 18, \lambda, u) = 18$$

luego

$(x, y, z) = (2, 2, 8)$ es el punto más bajo y $(x, y, z) = (-3, -3, 18)$ es el punto más alto

Ejemplo 3.49 *Hallar el valor máximo y mínimo de*

$$f(x, y, z) = x + 2y + 3z$$

sobre la curva de intersección de

$$x^2 + y^2 = 2 \quad y \quad y + z = 1$$

En efecto, la función de lagrange es

$$F(x, y, z, \lambda, u) = x + 2y + 3z + \lambda(x^2 + y^2 - 2) + u(y + z - 1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 1 + 2x\lambda = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2 + 2y\lambda + u = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 3 + u = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 2 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} = y + z - 1 = 0$$

Como

$\frac{\partial F}{\partial x} = 1+2x\lambda = 0$ *entonces* $x = -\frac{1}{2\lambda}$ *y como* $\frac{\partial F}{\partial y} = 2+2y\lambda+u = 0$ *entonces* $y = \frac{-2-u}{2\lambda}$

Como $\frac{\partial F}{\partial z} = 3 + u = 0$ *entonces* $u = -3$ *y asì* $y = \frac{-2-u}{2\lambda} = \frac{1}{2\lambda}$ *entonces*

$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2+y^2-2 = \left(-\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2\lambda}\right)^2 - 2 = \frac{2}{4\lambda^2} - 2 = 0$ *sii* $\lambda^2 = \frac{1}{4}$ *por tanto* $\lambda = \pm\frac{1}{2}$

Ahora para

a) $\lambda = \dfrac{1}{2}$ entonces $x = -\dfrac{1}{2\lambda} = -1$; $y = \dfrac{1}{2\lambda} = 1$ por tanto $y + z - 1 = 1 + z - 1 = 0$ entonces $z = 0$ por tanto $(x, y, z) = (-1, 1, 0)$ si $\lambda = \frac{1}{2}$

b) $\lambda = -\dfrac{1}{2}$ entonces $x = -\dfrac{1}{2\lambda} = 1$; $y = \dfrac{1}{2\lambda} = -1$ por tanto $y + z - 1 = -1 + z - 1 = 0$ entonces $z = 2$ por tanto $(x, y, z) = (1, -1, 2)$ si $\lambda = -\dfrac{1}{2}$

Como $F(-1, 1, 0, \lambda, u) = -1 + 2 + 3.0 = 1$ y $F(1, -1, 2, \lambda, u) = 1 - 2 + 3.2 = 5$ se concluye que en el punto $(-1, 1, 0)$ hay mínimo y su valor es 1 y en el punto $(1, -1, 2)$ hay máximo y su valor es 5

Ejemplo 3.50 *Minimizar*

$$x^2 + y^2 + z^2 \quad si \;\; x - y - 2 = 0 \quad y \quad x - 2z - 4 = 0$$

la función de Lagrange es

$$F(x, y, z, \lambda, u) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x - y - 2) + u(x - 2z - 4)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + \lambda + u = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 2z - 2u = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x - y - 2 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} = x - 2z - 4 = 0$$

De la segunda y tercera ecuación se tiene que $2y = \lambda$ *y* $2u = 2z$, *entonces*

$$2x + \lambda + u = 2x + 2y + z = 0 \quad \textit{entonces formamos el sistema de ecuaciones}$$

$$2x + 2y + z = 0$$

$$x - y - 2 = 0$$

$$x - 2z - 4 = 0$$

cuya solución es $(x, y, z) = \left(\dfrac{4}{3}, -\dfrac{2}{3}, -\dfrac{4}{3}\right)$ *por tanto el mínimo es*

$$F(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, \lambda, u) = \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{36}{9} = 4$$

Ejemplo 3.51 *Hallar el punto más lejos y más cercano al origen de la curva de inersección de las superficies*

$$z = 16 - x^2 - y^2 \quad y \; x + y = 4$$

la función de Lagrange es

$$F_1(x, y, z, \lambda, u) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + \lambda(16 - x^2 - y^2 - z) + u(x + y - 4)$$

$$F(x, y, z, \lambda, u) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(16 - x^2 - y^2 - z) + u(x + y - 4)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x - 2x\lambda + u = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y - 2y\lambda + u = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 2z - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 16 - x^2 - y^2 - z = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} = x + y - 4 = 0$$

De las dos primeras ecuaciones se tiene que

$$2x - 2y + (-2\lambda x + 2\lambda y) = 0 \;\; sii \; x - y - \lambda(x - y) = 0 \; ssi \; (x - y)(1 - \lambda) = 0 \;\; sii \;\; x = y \; o \; 1 = \lambda$$

entonces

a) Si $1 = \lambda$ entonces $2z - \lambda = 2z - 1 = 0$ si $z = \frac{1}{2}$, por tanto $16 - x^2 - y^2 - z = 16 - x^2 - y^2 - \frac{1}{2} = 0$ sii $x^2 + y^2 = \frac{31}{2}$ y como $x + y = 4$ entonces solucionamos este sistema para obtener

b)Si $x = y$ entonces $2x = 4$ luego $x = 2$ y asì $16 - 4 - 4 - z = 0$, por tanto $z = 8$ terminarlo

Ejercicio 9 **1.** *Hallar las dimensiones de la caja rectangular de volúmen dado que tiene área de superficie mínima*

2. Hallar el volúmen máximo de un sólido rectangular si la suma de las longitudes de sus aristas es $12a$.Respuesta $x = y = z = a \quad xyz \quad 4(x + y + z) = 12a$

3. Hallar el máximo de xyz si $x^3 + y^3 + z^3 = 1$. Respuesta 1/3, $x = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}} = y = z$

4. Hallar el mínimo de $f(x,y) = x^2+(y-2)^2$ si $x^2-y^2 = 1$. Respuesta 3, $\left(-\sqrt{2}, 1\right), \left(\sqrt{2}, 1\right)$

5. Hallar el máximo y el mínimo de $f(x,y) = xy$ *si* $x^2+y^2 = 1$. Respuesta, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$

6. Hallar los puntos de la superficie $z^2 - xy = 1$ más próximos y más alejados al origen. Respuesta más próximos $(0, 0, \pm 1)$;más alejados $(1,-1,0), (-1,1,0)$

7. Hallar la mínima distancia del punto $(1,0)$ a $\mathrm{y}^2 = 4x$. Respuesta 1

8. Hallar la máxima y mínima distancia de $5x^2+6xy+5y^2 = 8$ al origen. Respuesta 2,1

9. El perímetro de un rectángulo es de 4 metros halle las dimensiones para que el área sea máxima. Respuesta $x = 1$, $y = 1$

10. Una caja rectangular sin tapa se va a fabricar con 12 metros cuadrados de cartulina. Halle el máximo volumen de dicha caja. Respuesta $4, x = 2, y = 2, z = 1$

11. Halle la mínima distancia del punto $(1,0,-2)$ al plano $x+2y+z = 4$. Respuesta $\frac{5\sqrt{6}}{6}$ $(\frac{11}{6}, \frac{5}{3}, -\frac{7}{6})$

12. Halle el valor máximo y mínimo de $f(x,y) = 3x+4y$ si $x^2+y^2 = 1$. Respuesta $5, -5$, $\pm\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

13. El plano $x+y+z = 1$ corta al cilindro $x^2+y^2 = 1$ en una curva halle los puntos más lejos y mas cercanos al origen. Respuesta (1,0,0)(0,1,0) más cercano y más alejado $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1+\sqrt{2})$

Capítulo 4

Integrales Dobles

4.1 Intoducción

En este capítulo primero se recuerda la defininción de integral de una función de una variable $\int_a^b f(x)dx$, lo que significa una particición de un intervalo cerrado $[a, b]$, se define en forma análoga la integral doble $\iint_Q f(x, y)dxdy$ y se ilustran estos conceptos con una variedad de ejemplo.

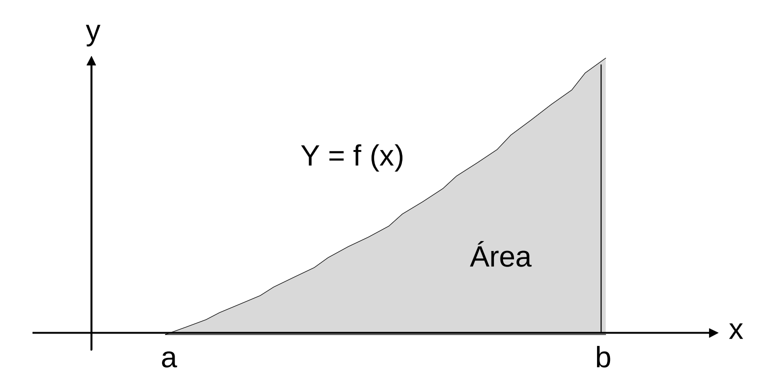
Partición de un intervalo cerrado $[a, b]$.

Una partición de un intervalo cerrado $[a, b]$, es un subconjunto finito de puntos de $[a, b]$, que contiene los puntos a y b con algunas características, por ejemplo los conjuntos siguientes $\{0, 1\}$,$\{0, 1/2, 1\}$,$\{0, 1/4, 2/4, 3/4, 1\}$, $\{0, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5, 1\}$,$\{0, 1/4, 3/4, 1\}$ son todas particiones del intervalo cerrado $[0, 1]$, pero $\{0, 3/4, 2/4, 1\}$ no es una partición del intervalo $[0, 1]$,es decir ,diremos que $P = \{x_0, x_1, x_2, ...x_n\}$ es partición de un intervalo cerrado $[a, b]$ si $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ y que la partición divide a $[a, b]$ en un número finito de intervalos $[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], ... [x_{n-1}, x_n]$, con longitudes $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, ...\Delta x_n$ (fig 1)

Δx_1 Δx_2 Δx_{k-1} Δx_k Δx_n

a b

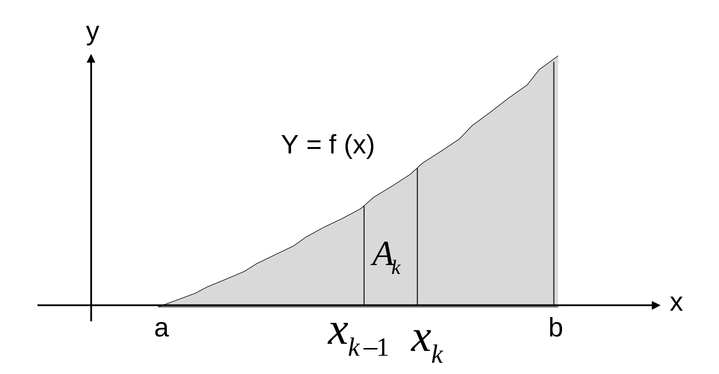
x_0 x_1 x_2 x_{k-2} x_{k-1} x_k x_{n-1} x_n



4.2 Definición de $\int_a^b f(x)dx$

El propósito es calcular el área de la región encerrada por las curvas $y = f(x) \geq 0$, $x = a$, $x = b$ y el eje x (fig 2)

y para ello consideremos una partición $P = \{x_0, x_1, x_2, ...x_n\}$ de $[a, b]$ y tomaremos la longitud de cada intervalo igual, es decir, $\Delta x_k = \dfrac{b-a}{n}$, k=1,2 ...,n y calcularemos el área del rectángulo $A_k = f(t_k)\Delta x_k\,,\, para \;\; t_k = x_{k-1}$ (fig 3) y formamos $\sum\limits_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k$, que es la suma de las áreas de cada rectángulo, el cual va a ser una aproximación del área A.



Para obtener el área A, haremos muchas más particiones, de tal forma que los rectángulos queden bien pequeños de base, y esto se logra haciendo tender n a infinito,

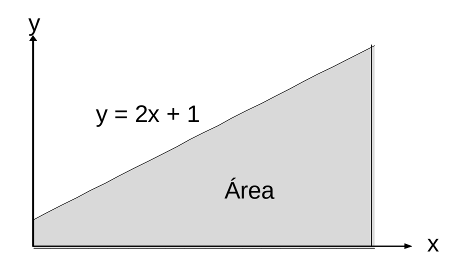
es decir ,

$$Area = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx$$

siendo t_k cualquier punto en $[x_{k-1}, x_k]$ y esta expresión es la que define la $\int_a^b f(x)dx$, si el límite existe, en otras palabras,

$$\text{Area} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx \qquad \text{si} \;\; f(x) \geq 0$$

Ejemplo 4.1 *Calcular el área de la región limitada por $y = 2x + 1$, $x = 0$, $x = 3$ y el eje x (fig 4)*



Solución. Sea $P = \{x_0, x_1, x_2, ...x_n\}$ una partición de $[0, 3]$ con $\Delta x_k = \dfrac{3-0}{n} = \dfrac{3}{n}$, $x_0 = 0$, $x_1 = \dfrac{3}{n}$, $x_2 = \dfrac{2*3}{n}$, $x_3 = \dfrac{3\ *3}{n}$, $x_4 = \dfrac{4*3}{n}$, ..., $x_{k-1} = (k-1)\,\dfrac{3}{n}$, $x_k = \dfrac{3*k}{n}$, ...y así si $t_k = x_{k-1}$ entonces

$$Area = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\frac{3}{n}\,(k-1))\frac{3}{n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n}(2 * \frac{3}{n}\,(k-1)+1)\frac{3}{n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n}(\frac{6}{n}\,(k-1)+1)\frac{3}{n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n}(\frac{6}{n}\,(k-1)+1)\frac{3}{n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n}(\frac{6*k}{n} - \frac{6}{n} + 1)\frac{3}{n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} \sum_{k=1}^{n}(\frac{6*k}{n} - \frac{6}{n} + 1) = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n}(\sum_{k=1}^{n} \frac{6*k}{n} - \sum_{k=1}^{n} \frac{6}{n} + \sum_{k=1}^{n} 1) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{18}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k - \frac{18}{n^2} \sum_{k=1}^{n} 1 + \frac{3}{n} \sum_{k=1}^{n} 1 \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{18}{n^2} * \frac{n(n+1)}{2} - \frac{18}{n^2} * n + \frac{3}{n} * n \right) =$$

$$= 9 - 0 + 3 = 12 \text{ luego}$$

$$\text{Area} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k = \int_0^3 (2x+1)\,dx = 12.$$

Ejemplo 4.2 *calcular*

$$\int_{-1}^{4} 10dx$$

(Area encerrada por las curvas $y = 10$, $x = -1$, $x = 4$ y el eje x)

Solución. Sea $P = \{x_0, x_1, x_2, ...x_n\}$ una partición de $[-1, 4]$ con

$$\Delta x_k = \frac{4-(-1)}{n} = \frac{5}{n},\ x_0 = -1,\ x_1 = -1 + \frac{5}{n},\ x_2 = -1 + \frac{2*5}{n},\ \ x_3 = -1 + \frac{3\ *5}{n},$$

$$x_4 = -1 + \frac{4*5}{n}, ...,\ x_{k-1} = -1 + (k-1)\,\frac{5}{n},\ \ x_k = -1 + \frac{5*k}{n}$$

....y así si tomamos $t_k = x_k$ entonces

$$\int_{-1}^{4} 10dx \ \ = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(-1 + \frac{5*k}{n})\frac{5}{n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} 10 * \frac{5}{n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{50}{n} \sum_{k=1}^{n} 1 = \lim_{n\to\infty} \frac{50}{n} * n = 50$$

luego

$$Area = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k = \int_{-1}^{4} 10dx = 50.$$

Ejemplo 4.3 *Calcular*

$$\int_a^b x^2 dx$$

(Area encerrada por las curvas $f(x) = x^2, x = a, x = b$ y el eje x)

Solución. Se particiona el intervalo $[a,b]$ en n subintervalos de igual longitud

$$\Delta x_k = \frac{b-a}{n}, k = 1, 2, ...n$$

y así

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + \Delta x_1 = a + \left(\frac{b-a}{n}\right), \quad x_2 = a + 2\Delta x_1 = a + 2\left(\frac{b-a}{n}\right) \; ......$$

$$x_k = a + k\Delta x_1 = a + k\left(\frac{b-a}{n}\right) ......x_n = a + n\Delta x_1 = a + n\left(\frac{b-a}{n}\right) = b$$

Si tomamos

$$t_k = \; x_k = \; a + k\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

y como

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \text{ entonces } f(t_k) = f\left(a + k\left(\frac{b-a}{n}\right)\right) = \left(a + k\left(\frac{b-a}{n}\right)\right)^2 = \\ &= a^2 + \frac{2ak(b-a)}{n} + \frac{k^2(b-a)^2}{n^2} \end{aligned}$$

y así

$$\int_a^b x^2 dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(a^2 + \frac{2ak(b-a)}{n} + \frac{k^2(b-a)^2}{n^2}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{b-a}{n}\right) a^2 \sum_{k=1}^{n} 1 + \left(\frac{b-a}{n}\right) 2a \left(\frac{b-a}{n}\right) \sum_{k=1}^{n} k + \left(\frac{b-a}{n}\right)\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \sum_{k=1}^{n} k^2\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left((b-a)a^2 + (b-a)^2 \frac{2a}{n^2} n \left(\frac{n+1}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{n^3}\left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right)\right) =$$

$$= (b-a)a^2 + \frac{(b-a)^2}{2}2a + \frac{(b-a)^3}{3} = (b-a)\left[a^2 + ab - a^2 + \frac{b^2}{3} - \frac{2ab}{3} + \frac{a^2}{3}\right] =$$

$$= (b-a)\left[\frac{a^2}{3} + \frac{ab}{3} + \frac{b^2}{3}\right] = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

luego

$$\int_a^b x^2 \ dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

Así como la definición de

$$\int_a^b f(x)$$

fue motivada para hallar el área de una región, la integral doble, la motivaremos, hallando el volúmen del sólido S limitado por las gráficas de las superficies

$$z = f(x,y) \geq 0, \quad x = a, \ x = b; \quad y = c, \quad y = d, \quad z = 0$$

y su tratamiento es muy similar

4.3 Partición de un rectángulo $Q = [a,b] \ \times \ [c,d]$

Sea $f \ (x,y)$ una función continua en $Q = [a,b] \ \times \ [c,d]$

y $P_1 = \{x_0, x_1, x_{2.....,}x_n\}$ una partición de $[a,b]$ y $P_2 = \{y_0, y_1, ..., y_m\}$ una partición de $[c,d]$

Una partición de Q, es un subconjunto de la forma

$$P = P_1 \times P_2 = \{(x_i, y_j)/x_i \in \ P_1, \ y_j \in \ P_2 \ , \ 0 \leq i \leq n \ , \ 0 \leq j \leq m\}$$

y descompone a Q en nm rectángulos que no se solapan

$$Rij = \{(x,y) \ / \ \ x_{i-1} \leq x \leq x_i \ , \ \ y_{j-1} \leq y \leq y_j\}$$

(fig 5).

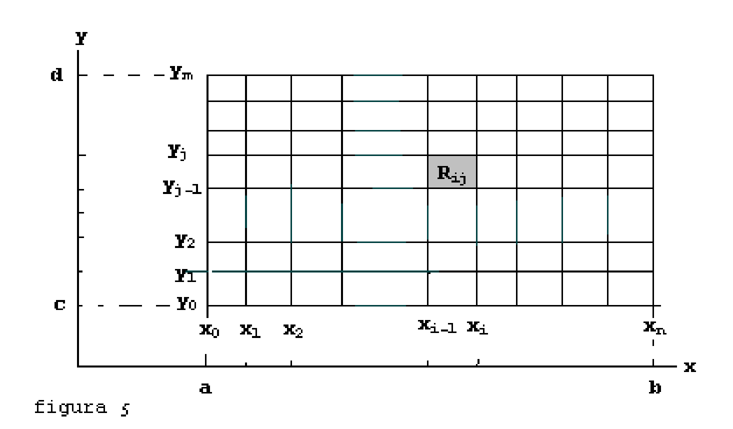


figura 5

y sea (t_i, s_j) un punto cualquiera en Rij y formemos $f(t_i, s_j)\ \Delta x_i\ \Delta y_j$ el volúmen del prisma (fig 6) y

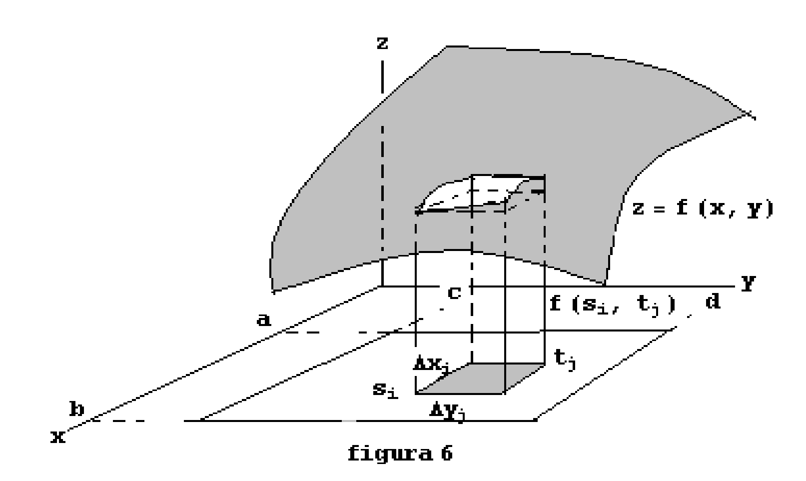


figura 6

y así

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} f(t_i, s_j)\ \Delta x_i\ \Delta y_j$$

es el volúmen aproximado y si hacemos bien pequeños los prismas, haciendo tender n a infinito y m a infinito obtenemos el volúmen exacto, es decir,

$$V(s) = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} f(t_i, s_j)\ \Delta x_i\ \Delta y_j$$

y si este límite existe, representa el valor de la integral doble, es decir,

4.4 Definición de integral doble

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{m}\ \sum_{i=1}^{n} f(t_i, s_j\ )\ \Delta x_i\ \Delta y_j\ =\ \iint\limits_{Q} f(x,y)dxdy$$

Las propiedades de las integrales dobles son muy análogas a las de una variable, es decir, si α , $\beta \in R$ y si $f(x,y), g(x,y)$, son continuas en una región Q cerrada y acotada en el plano entonces

4.5 Propiedades

1.
$$\iint\limits_{Q} (\alpha f(x,y) \pm \beta g(x,y))\, dxdy = \alpha \iint\limits_{Q} f(x,y)dxdy \pm \beta \iint\limits_{Q} g(x,y)dxdy$$

2. Si $f(x,y) \geq g(x,y)\ en\ Q$ entonces
$$\iint\limits_{Q} f(x,y)dxdy \geq \iint\limits_{Q} g(x,y)dxdy$$

3. Si Q se descompone en $Q_1, Q_2, Q_3, ...Q_n$,que no se solapen entonces

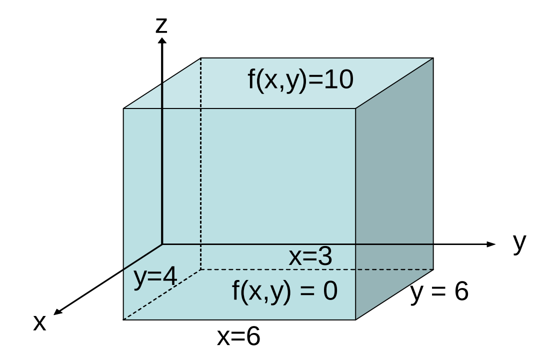
$$\iint\limits_{Q} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{Q_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{Q_2} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{Q_3} f(x,y)dxdy + ... + \iint\limits_{Q_n} f(x,y)dxdy$$

Ejemplo 4.4 *Calcular el volúmen del sólido limitado por las superficies* $f(x,y) = 10$, $f(x,y) = 0, x = 3,\ x = 6,\ \ y = 4,\ y\ \ y = 6$ *(fig 7)*

Solución. Sea $P_1 = \{x_0, x_1, x_2, ...x_n\}$ una partición de $[3,6]$ con

$$\Delta x_i = \frac{6-3}{n} = \frac{3}{n}\ , 1 \leq i \leq n, \qquad \text{así} \quad x_0 = 3,\ \ x_1 = 3 + \frac{3}{n},\quad x_2 = 3 + \frac{2*3}{n},$$

$$\begin{aligned} x_3 &= 3 + \frac{3\ *3}{n},\ \ x_4 = 3 + \frac{4*3}{n}, ...,\ \ x_{i-1} = 3 + (i-1)\,\frac{3}{n}... \\ x_i &= 3 + \frac{3*i}{n}, ...x_n = 3 + \frac{3n}{n} = 6 \end{aligned}$$



y $P_2 = \{y_0, y_1, ..., y_m\}$ una partición de $[4,6]$ con

$$\Delta y_j = \frac{6-4}{m} = \frac{2}{m} \quad 1 \leq j \leq m \quad \text{así} \quad y_0 = 4, \quad y_1 = 4 + \frac{2}{m}, \; y_2 = 4 + \frac{2*2}{m},$$

$$\begin{aligned} y_3 &= 4 + \frac{3 \; *2}{m}, \; y_4 = 4 + \frac{4*2}{m}, ..., y_{j-1} = 4 + (j-1)\,\frac{2}{m}, \quad y_j = 4 + \frac{2*j}{m}, ... \\ y_m &= 4 + \frac{2m}{m} = 6 \;\; \text{y} \end{aligned}$$

sea

$$(t_i, s_j) = \left(3 + \frac{3i}{n}, 4 + \frac{2j}{m}\right) = (x_i, y_j)$$

pero este punto puede ser cualquiera en Rij y así

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} f(t_i, s_j \;) \; \Delta x_i \; \Delta y_j = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} 10 * \frac{3}{n} * \frac{2}{m} = \frac{60}{mn} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} 1 = \frac{60}{mn} * m * n = 60$$

ya que

$$\sum_{j=1}^{m} 1 = \sum_{j=1}^{m} (j+1) - j = m + 1 - 1 = m$$

aplicando la propiedad telescópica de las sumas finitas .

En forma análoga $\sum\limits_{i=1}^{n} 1 = n$ luego

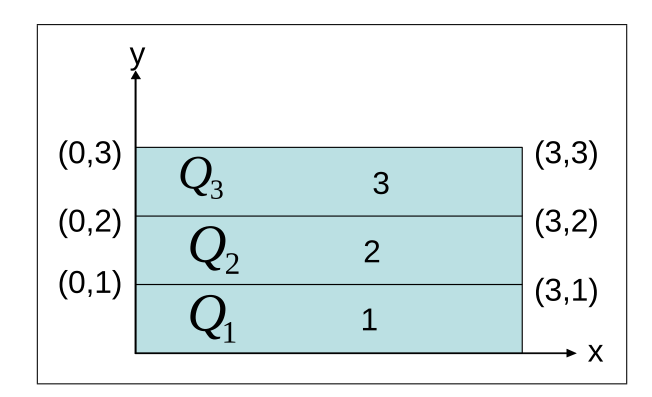
$$V \; (s) = \lim_{m \to \infty} \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} f(t_i, s_j \;) \; \Delta x_i \; \Delta y_j = \lim_{m \to \infty} \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \frac{60}{mn}$$

$$= \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} 60 = 60 = \iint_Q 10dxdy = 10\,(6-3)\,(6-4)$$

Ejemplo 4.5 *Calcular*

$$\iint_Q f(x,y)dxdy \quad si\ Q = \{(x,y)\,/0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 3\}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & si\ \ 0 \le x \le 3 \quad 0 \le y \le 1 \\ 2 & si\ \ 0 \le x \le 3 \quad 1 < y \le 2 \\ 3 & si\ \ 0 \le x \le 3 \quad 2 < y \le 3 \end{cases} \qquad (fig8)$$



$f(x,y)$ es una función seccionalmente continua en Q, luego es integrable en Q y

$$\iint_Q f(x,y)dxdy = \iint_{Q_1} f(x,y)dxdy + \iint_{Q_2} f(x,y)dxdy + \iint_{Q_3} f(x,y)dxdy =$$

$$\iint_{Q_1} 1dxdy + \iint_{Q_2} 2dxdy + \iint_{Q_3} 3dxdy = 1*3*1 + 2*3*1 + 3*3*1 = 3+6+9 = 18$$

si $Q_1 = \{(x,y)/0 \le x \le 3,\, 0 \le y \le 1\}$, $Q_2 = \{(x,y)/0 \le x \le 3,\ \ 1 \le y \le 2\}$, $Q_3 = \{(x,y)/0 \le x \le 3,\ \ 2 \le y \le 3\}$. Recuerde que una función seccionalmente continua en un intevalo cerrado es integrable.

Ejemplo 4.6 *Calcular*

$$\iint_Q (y+2x)dxdy \quad si \qquad Q = [1,2] \times [3,5]$$

Solución Sea $P_1 = \{x_0, x_1, x_2, ...x_n\}$ una partición de $[1, 2]$ con

$$\Delta x_i = \frac{2-1}{n} = \frac{1}{n}, \quad 1 \leq i \leq n, \text{ así } x_0 = 1, \quad x_1 = 1 + \frac{1}{n}, \quad x_2 = 1 + \frac{2}{n}, \ x_3 = 1 + \frac{3}{n},$$

$$x_4 = 1 + \frac{4}{n}, ..., \quad x_{i-1} = 1 + (i-1) * \frac{1}{n}, \quad x_i = 1 + \frac{i}{n}, ...x_n = 1 + \frac{n}{n} = 2$$

y $P_2 = \{y_0, y_1, ..., y_m\}$ una partición de $[3, 5]$ con $\Delta y_j = \dfrac{5-3}{m} = \dfrac{2}{m}, \ 1 \leq j \leq m,$ así se tiene que

$$y_0 = 3, y_1 = 3 + \frac{2}{m}, \ y_2 = 3 + \frac{2*2}{m}, \ y_3 = 3 + \frac{3 \ *2}{m}$$

$$y_4 = 3 + \frac{4*2}{m}, ..., y_{j-1} = 3 + (j-1) * \frac{2}{m}, \quad y_j = 3 + \frac{2*j}{m}, ...y_m = 3 + \frac{2m}{m} = 5 \text{ sea}$$

$$(t_i, s_j) = (x_i, y_j) = \left(1 + \frac{i}{n} \ , 3 + \frac{2j}{m}\right)$$

pero puede ser cualquiera punto en Rij y

$$f\,(t_i, s_j) = f(1 + \frac{i}{n} \ , 3 + \frac{2j}{m}) = 3 + \frac{2j}{m} + 2 * \left(1 + \frac{i}{n}\right) = 3 + \frac{2j}{m} + 2 + \frac{2i}{n} = \left(5 + \frac{2j}{m} + \frac{2i}{n}\right) \text{ y}$$

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} f(t_i \, , s_j \,) \, \Delta x_i \, \Delta y_j = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} (5 + \frac{2j}{m} + \frac{2i}{n}) * \frac{1}{n} * \frac{2}{m} = \frac{1}{n} * \frac{2}{m} \sum_{j=1}^{m} 5n + \frac{2jn}{m} + \frac{2}{n} * \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{1}{n} * \frac{2}{m} \sum_{j=1}^{m} \left(5n + \frac{2jn}{m} + (n+1)\right) = \frac{1}{n} * \frac{2}{m} * (5nm + \frac{2*n*m*(m+1)}{2m} + m * (n+1)) =$$

$$= \frac{1}{n} * \frac{2}{m} * (5mn + n(m+1) + m(n+1))$$

y así

$$\lim_{m \to \infty} \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{m} \ \sum_{i=1}^{n} f(t_i \, , s_j \,) \, \Delta x_i \, \Delta y_j = \lim_{m \to \infty} \lim_{n \to \infty} (5mn + n * (m+1) + m(n+1)) * \frac{1}{n} * \frac{2}{m} =$$

$$= (5 + 1 + 1)2 = 14$$

luego

$$\iint_Q (y+2x)dxdy = 14$$

Ahora tomemos

$$(t_i, s_j) = (x_{i-1}, y_j) = \left(1 + \frac{i-1}{n}, 3 + \frac{2j}{m}\right)$$

otro punto en R_{ij} y mostremos que el resultado no varía

$$f\left(t_i, s_j\right) = f(1 + \frac{i-1}{n}\ , 3 + \frac{2j}{m}) = 3 + \frac{2j}{m} + 2\left(1 + \frac{i-1}{n}\right) = 3 + \frac{2j}{m} + 2 + \frac{2i}{n} - \frac{2}{n} =$$

$$= \left(5 + \frac{2j}{m} + \frac{2i}{n} - \frac{2}{n}\right)$$

y

$$\sum_{j=1}^{m}\ \sum_{i=1}^{n} f(t_i, s_j\ )\ \Delta x_i\ \Delta y_j = \ \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\left(5 + \frac{2j}{m} + \frac{2i}{n} - \frac{2}{n}\right)\frac{1}{n}\frac{2}{m} =$$

$$= \frac{1}{n}\frac{2}{m}\sum_{j=1}^{m}\left(5n + \frac{2jn}{m} + \frac{2}{n}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) - 2\right) = \frac{1}{n}\frac{2}{m}\sum_{j=1}^{m}\left(5n + \frac{2jn}{m} + (n+1) - 2\right) =$$

$$= \frac{2}{mn}\left(5nm + \frac{2nm(m+1)}{2m} + m(n+1) - 2m\right) = \frac{2}{mn}(5mn + n(m+1) + m(m+1) - 2m) =$$

por lo tanto

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{m}\ \sum_{i=1}^{n} f(t_i, s_j\ )\ \Delta x_i\ \Delta y_j = \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{mn}(5mn + n(m+1) + m(n+1) - 2m)\right) =$$

$$= 2\left(5+1+1-0\right) = 14$$

entonces

$$\iint_Q (y+2x)dxdy = 14.$$

Así como la integral $\int_a^b f(x)dx$, puede representar una área si $f(x) \geq 0$, un espacio si $f(x)$ representa velocidad o una masa, si $f(x)$ representa una densidad, así tambien la integral doble puede representar un volumen, una masa etc.

Afrontemos ahora con formalidad el problema de evaluar la $\iint_Q f\left(x,y\right)dxdy$, si $f\left(x,y\right)$ es una función continua en Q y para ello consideremos los siguientes tipos de regiones.

4.6 Tipos de regiones

1. Q un rectángulo de la forma $Q = [a, b] \times [c, d]$
2. $Q = \{(x, y) /\ a \leq x \leq b,\ g(x) \leq y \leq h(x)\}$
3. $Q = \{(x, y) /\ c \leq y \leq d\ ,\ q(y) \leq x \leq l(y)\}$

4.6.1 Tipo1

1. Si $f(x, y)$ es una función continua en $Q = [a, b] \times [c, d]$ entonces

$$\iint_Q f(x, y)\, dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\ \ dx \right) dy.$$

Para calcular

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx$$

primero se calcula $\int_c^d f(x, y)\, dy$, considerando a x como constante y así se obtiene que $\int_c^d f(x, y)\, dy = A(x)$ (Es una función en x) y luego se calcula $\int_a^b A(x)dx$.

En forma análoga, para calcular $\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\ \ dx \right) dy$, se calcula primero $\int_a^b f(x, y)\ dx$ considerando a y como constante, para obtener $\int_a^b f(x, y)\ dx = B(y)$ y luego se calcula $\int_c^d B(y)dy$.

Ejemplo 4.7 *Calcular*

$$\iint_Q (4 - x^2 - y)dxdy \quad si \quad Q = [0, 1] \times [0, 2]$$

Solución

$$\iint_Q (4 - x^2 - y)dxdy = \int_0^1 \int_0^2 (4 - x^2 - y)dydx = \int_0^2 \int_0^1 (4 - x^2 - y)dxdy.$$

$$a) \quad \int_0^1 \int_0^2 (4-x^2-y)dydx = \int_0^1 \left[4y - x^2y - \frac{y^2}{2}\right]_0^2 dx = \int_0^1 \left(8 - 2x^2 - 2\right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(6 - 2x^2\right) dx = \left[6x - \frac{2x^3}{3}\right]_0^1 = 6 - \frac{2}{3} = \frac{16}{3}.$$

$$b) \quad \int_0^2 \int_0^1 (4-x^2-y)dxdy = \int_0^2 \left[4x - \frac{x^3}{3} - yx\right]_0^1 dy = \int_0^2 (4-\frac{1}{3}-y)dy = \int_0^2 (\frac{11}{3}-y)dy =$$

$$= \left[\frac{11y}{3} - \frac{y^2}{2}\right]_0^2 = \frac{22}{3} - \frac{4}{2} = \frac{16}{3}$$

y así

$$\iint_Q (4 - x^2 - y)dxdy = \int_0^1 \int_0^2 (4 - x^2 - y)dydx = \int_0^2 \int_0^1 (4 - x^2 - y)dxdy. = \frac{16}{3}$$

Ejemplo 4.8 *Calcular*

$$\iint_Q e^{x+y}dxdy \quad si \quad Q = [1, 2] \times [0, 3]$$

Solución

$$\iint_Q e^{x+y}dxdy = \int_1^2 \int_0^3 e^{x+y}dydx = \int_0^3 \int_1^2 e^{x+y}dxdy$$

$$a) \quad \int_1^2 \int_0^3 e^{x+y}dydx = \int_1^2 \left[e^{x+y}\right]_0^3 dx = \int_1^2 (e^{x+3}-e^x)dx = \left[e^{x+3} - e^x\right]_1^2 = \left(e^5 - e^2\right)-\left(e^4 - e^1\right) =$$

$$= e^5 - e^4 - e^2 + e^1$$

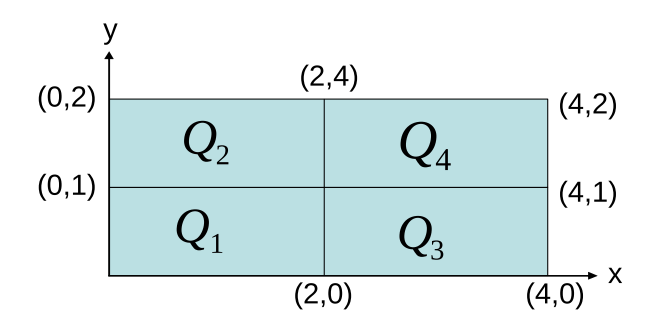
b) $$\int_0^3 \int_1^2 e^{x+y} dxdy = \int_0^3 \left[e^{x+y}\right]_1^2 dy = \int_0^3 \left(e^{2+y} - e^{1+y}\right) dy = \left[e^{2+y} - e^{1+y}\right]_0^3 = \left(e^5 - e^4\right) - \left(e^2 - e^1\right) =$$

$$= e^5 - e^4 - e^2 + e^1 \quad \text{luego}$$

$$\iint_Q e^{x+y} dxdy = e^5 - e^4 - e^2 + e^1.$$

Ejemplo 4.9 *Calcular*

$$\iint_Q \left[\frac{x}{2}\right][y]\, dxdy \qquad si \quad Q = [0,4] \times [0,2] \qquad (fig\ 9)$$



Solución

$$\left[\frac{x}{2}\right] = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq \frac{x}{2} < 1 \quad 0 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si} \quad 1 \leq \frac{x}{2} < 2 \quad 2 \leq x < 4 \\ 2 & \text{si} \quad 2 \leq \frac{x}{2} < 3 \quad 4 \leq x < 6 \end{cases}$$

y

$$[y] = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq y < 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1 \leq y < 2 \\ 2 & \text{si} \quad 2 \leq y < 3 \end{cases}$$

luego

$$\iint_Q \left[\frac{x}{2}\right][y]\, dxdy = \iint_{Q_1} 0 \cdot 0 dxdy + \iint_{Q_2} 1 \cdot 0 dxdy + \iint_{Q_3} 0 \cdot 1 dxdy + \iint_{Q_4} 1 \cdot 1 dxdy = \iint_{Q_4} dxdy$$

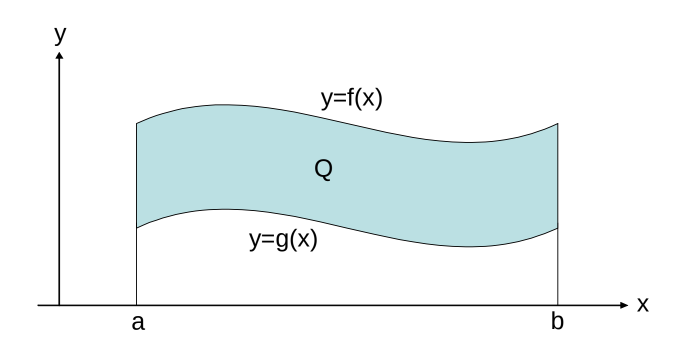
$$= \int_1^2 \int_2^4 dxdy = \int_1^2 (x)_2^4 \ dy = \int_1^2 2dy = (2y)_1^2 = 4 - 2 = 2$$

4.6.2 Tipo 2

Cuando h(x,y) es continua en la región de integración de la forma

$$Q = \{(x,y)/a \leq x \leq b, g\,(x) \leq y \leq f\,(x)\}$$

fig10



La integral

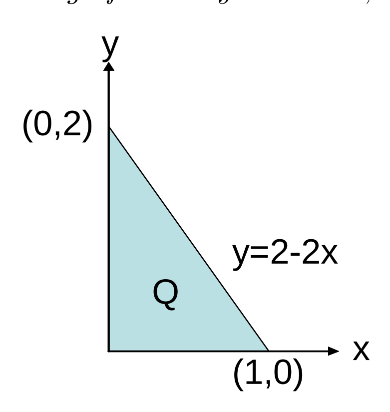
$$\iint\limits_{Q} h\,(x,y)\,dxdy = \int\limits_{a}^{b}\int\limits_{g(x)}^{f(x)} h(x,y)dydx$$

y ésta se calcula integrando $\int\limits_{g(x)}^{f(x)} h(x,y)dy$ considerando a x como una constante y luego integrando el resultado con respecto a x entre a y b.

Ejemplo 4.10 *Calcular*

$$\iint\limits_{Q} (x^2 + y^2 + 1)dxdy$$

si Q *es la región limitada por el gráfico de* $y = 2 - 2x$, $x = 0$, $y = 0$ *(fig 11)*



Solución

$$\iint_Q (x^2+y^2+1)dxdy = \int_0^1 \int_0^{2-2x} (x^2+y^2+1)dydx = \int_0^1 \left(x^2y+\frac{y^3}{3}+y\right)_0^{2-2x} dx$$

$$= \int_0^1 \left(x^2(2-2x)+\frac{(2-2x)^3}{3}+(2-2x)\right)dx =$$

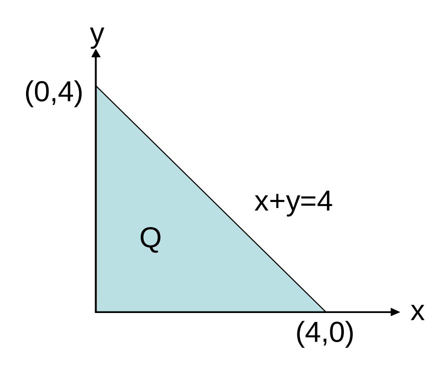
$$= \int_0^1 \left(2x^2-2x^3+\left(\frac{8-24x+24x^2-8x^3}{3}\right)+2-2x\right)dx$$

$$= \int_0^1 \left(-\frac{14x^3}{3}+10x^2-10x+\frac{14}{3}\right)dx = \frac{11}{6}.$$

Ejemplo 4.11 *Calcular*

$$\iint_Q xdxdy$$

si Q es la región limitada por el gráfico de las curvas $x+y=4$, y los ejes coordenados (fig 12).



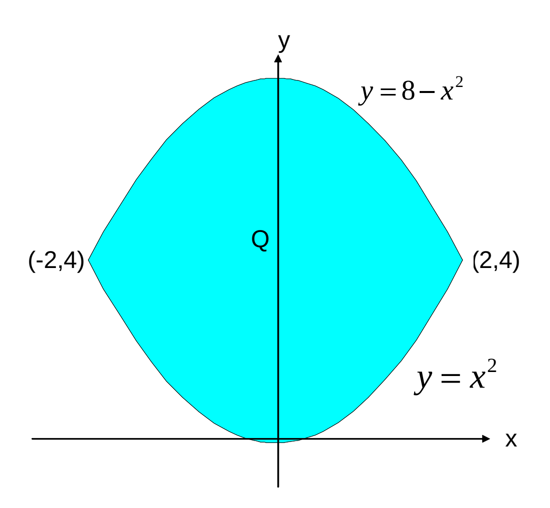
Solución .

$$\iint_Q xdxdy = \int_0^4 \int_0^{4-x} xdydx = \frac{32}{3}$$

Ejemplo 4.12 *Calcular*

$$\iint\limits_{Q} xydxdy$$

si Q *es la región limitada por el gráfico de las curvas* $y = x^2,\ y = 8 - x^2$ *fig 13*



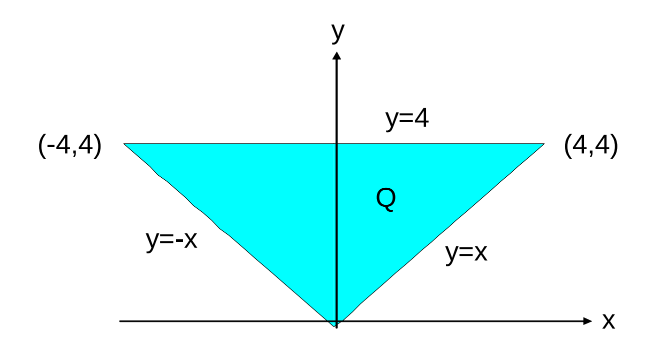
Solución

$$.\iint\limits_{Q} xydxdy \ = \int_{-2}^{2} \int_{x^2}^{8-x^2} xydydx = 0.$$

Ejemplo 4.13 *Calcular*

$$\iint\limits_{Q} (x + y)\, dxdy$$

si Q *es la región limitada por el gráfico de las curvas* $y = |x|\,,\ \ y = 4$ *fig 14*



Solución

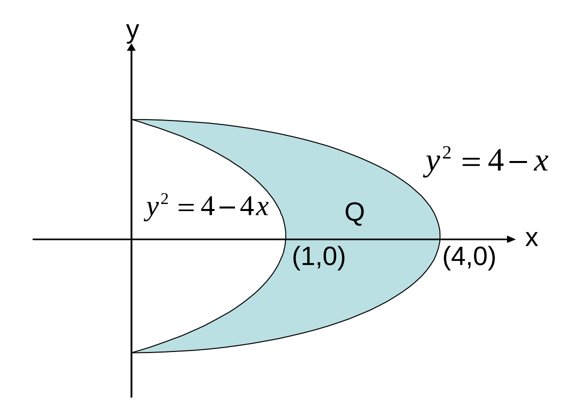
$$\iint\limits_Q (x+y)\,dxdy \;= \int\limits_0^4 \int\limits_{-y}^{y} (x+y)\,dxdy = \frac{128}{3} = \int\limits_{-4}^{0} \int\limits_{-x}^{4} (x+y)\,dydx + \int\limits_0^4 \int\limits_x^4 (x+y)\,dydx$$

.

Ejemplo 4.14 *Calcular*

$$\iint\limits_Q ydxdy$$

si Q es la región limitada por el gráfico de las curvas $y^2 = 4-x,\ y^2 = 4-4x$ *fig15*

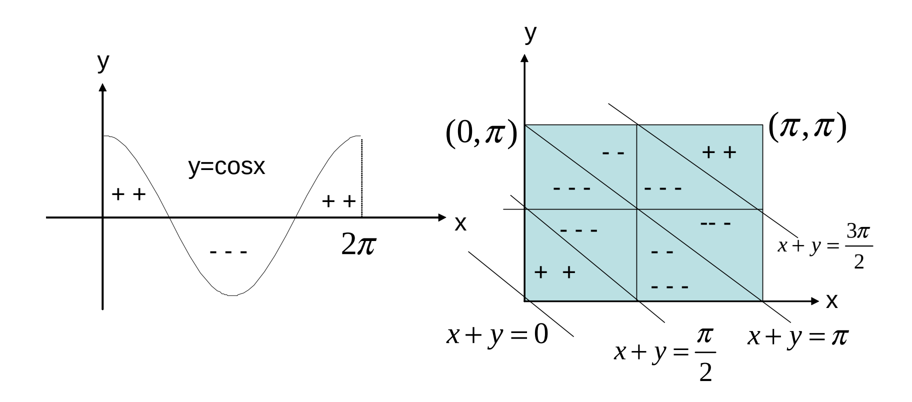


Solución.

$$\iint\limits_Q ydxdy \;= \int\limits_0^1 \int\limits_{-\sqrt{4-x}}^{-\sqrt{4-4x}} ydydx + \int\limits_0^1 \int\limits_{\sqrt{4-4x}}^{\sqrt{4-x}} ydydx + \int\limits_1^4 \int\limits_{-\sqrt{4-x}}^{\sqrt{4-x}} ydydx = 0.$$

Ejemplo 4.15 *Calcular*

$$\iint\limits_Q |\cos(x+y)|\,dxdy \qquad Q = [0,\pi]\times[0,\pi] \quad \textit{(fig16)}$$



$$|\cos x| = \begin{cases} \cos x & \text{si} \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ -\cos x & \text{si} \quad \frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2} \\ \cos x & \text{si} \quad \frac{3\pi}{2} \le x \le \frac{5\pi}{2} \end{cases}$$

$$|\cos(x+y)| = \begin{cases} \cos(x+y) & \text{si} \quad 0 \le x+y \le \frac{\pi}{2} \\ -\cos(x+y) & \text{si} \quad \frac{\pi}{2} \le x+y \le \frac{3\pi}{2} \\ \cos(x+y) & \text{si} \quad \frac{3\pi}{2} \le x+y \le \frac{5\pi}{2} \end{cases}$$

$$\text{así} \quad \iint_Q |\cos(x+y)|\, dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} \cos(x+y) dydx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{2}-x}^{\pi} -\cos(x+y) dydx +$$

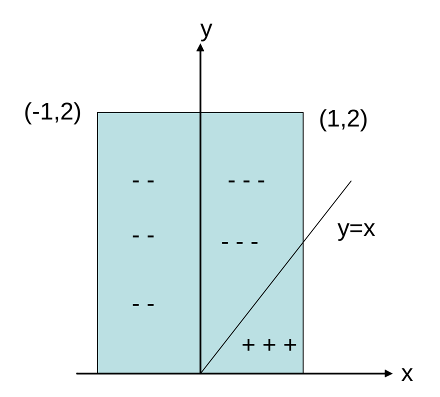
$$+ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^{\frac{3\pi}{2}-x} -\cos(x+y) dydx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_{\frac{3\pi}{2}-x}^{\pi} \cos(x+y) dydx = 2\pi.$$

Ejemplo 4.16 *Calcular*

$$\iint_Q |(x-y)|\, dxdy \quad Q = \ [-1,1] \times [0,2] \quad \textit{(fig17).}$$

Solución Como

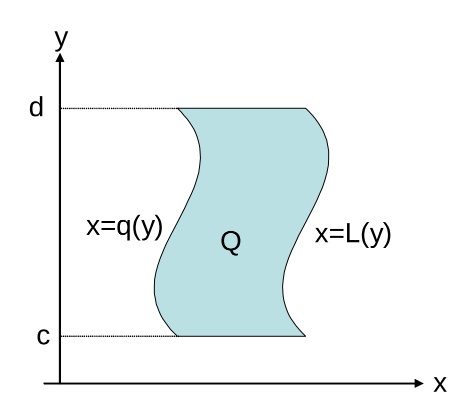
$$|(x-y)| = \begin{cases} x-y & si \quad x \ge y \\ -(x-y) & si \quad x < y \end{cases} \qquad \text{entonces}$$



$$\iint\limits_{Q} |(x-y)|\, dxdy = \int\limits_{-1}^{0}\int\limits_{0}^{2} (y-x)\, dydx + \int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{x} (x-y)dydx + \int\limits_{0}^{1}\int\limits_{x}^{2} (y-x)dydx = \frac{13}{3}$$

4.6.3 Tipo 3

$$Q = \{(x,y)/c \le y \le d,\ q(y) \le x \le L(y)\} \quad \text{(fig18).}$$



En éste caso la integral se calcula así :

$$\iint\limits_{Q} f(x,y)\, xdy = \int\limits_{c}^{d}\int\limits_{q(y)}^{L(y)} f(x,y)dxdy$$

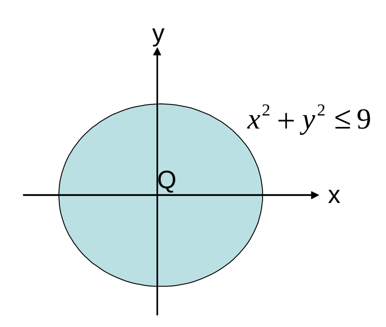
y ésta se calcula integrando

$$\int_{q(y)}^{L(y)} f(x,y)dx$$

considerando a y como constante y luego integrando el resultado con respecto a y entre c y d.

Ejemplo 4.17 *Calcular*

$$\iint_Q \sqrt{9-y^2}dxdy \quad si \;\; Q = \{(x,y)\,/x^2+y^2 \leq 9\} \quad \text{(fig19)}$$



Solución

$$\iint_Q \sqrt{9-y^2}dxdy = \int_{-3}^{3} \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} \sqrt{9-y^2}dxdy = \int_{-3}^{3} \left[x\sqrt{9-y^2}\right]_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} dy =$$

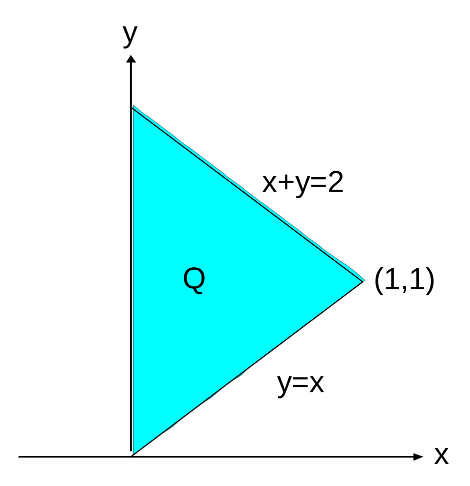
$$\int_{-3}^{3} \left(\sqrt{9-y^2} - \left(-\sqrt{9-y^2}\right)\right) * \sqrt{9-y^2}dy = 2\int_{-3}^{3} \left(9-y^2\right) dy = 2\left[9y - \frac{y^3}{3}\right]_{-3}^{3} =$$

$$= 2\left[\left(27 - \frac{27}{3}\right) - \left(-27 + \frac{27}{3}\right)\right] = 72$$

Ejemplo 4.18 *Calcular*

$$\iint_Q (x+y)\,dxdy$$

si Q es la región limitada por el gráfico del a curvas $y = x$, $x + y = 2, x = 0$ (fig20).



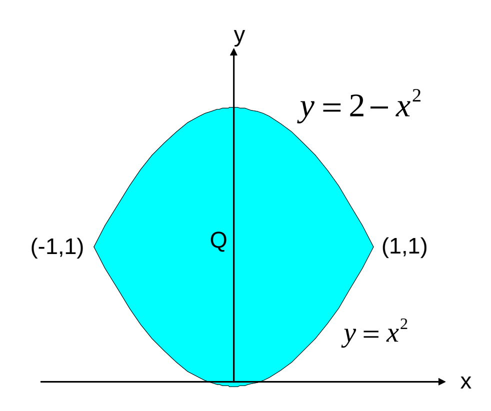
Solución.

$$\iint\limits_{Q} (x+y)\,dxdy = \int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{y} (x+y)\,dxdy + \int\limits_{1}^{2}\int\limits_{0}^{2-y} (x+y)\,dxdy = \frac{4}{3}$$

Ejemplo 4.19 *Calcular*

$$\iint\limits_{Q} xdxdy$$

si Q es la región limitada por el gráfico de las curvas $y = 2 - x^2,\ y = x^2$ fig 21.



Solución.

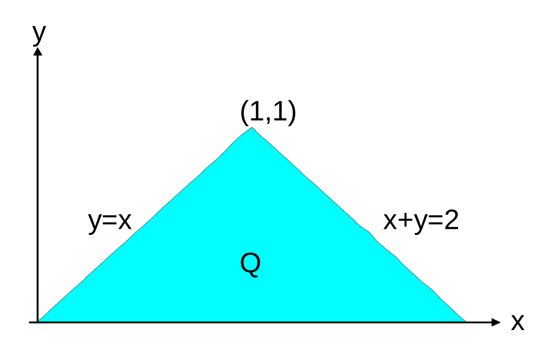
$$\iint_Q x dx dy = \int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} x dx dy + \int_1^2 \int_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} x dx dy = 0$$

En algunas oportunidades se puede calcular la integral $\iint_Q f(x,y)\, dx dy$ por el caso 2 ó por el caso 3, pero en otras se puede calcular solamente por uno de los dos casos como se ilustrará con los ejemplos siguientes

Ejemplo 4.20 *Calcular*

$$\iint_Q x dx dy$$

si Q *es la región limitada por el gráfico de las curvas* $y = 0, x + y = 2,\ y = x$ *fig 22.*



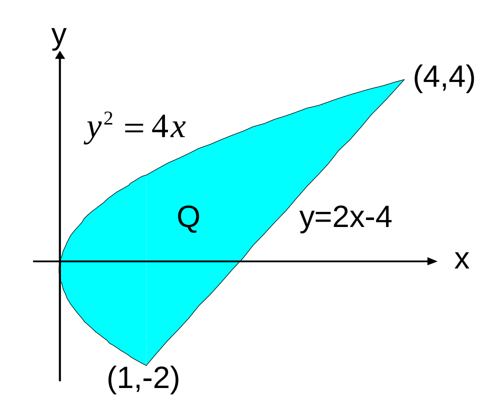
Solución. Para hallar el punto $(1,1)$ iguale $x + y = 2$ con $y = x$ y así

$$\iint_Q x dx dy = \int_0^1 \int_0^x x dy dx + \int_1^2 \int_0^{2-x} x dy dx = \int_0^1 \int_y^{2-y} x dx dy = 1.$$

Ejemplo 4.21 *Calcular*

$$\iint_Q y dx dy$$

si Q *es la región limitada por el gráfico de las curvas* $y^2 = 4x,\ y = 2x - 4$ *fig 23.*



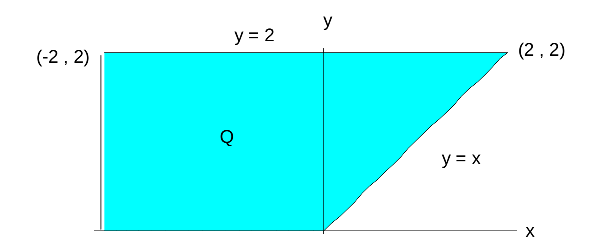
Solución. Los puntos $(4,4),(1,-2)$ se hallan igualando las curvas, despeje x de $y = 2x-4$ y reemplácelo en $y^2 = 4x$ y solucione esta ecuación de segundo grado en y y así $y = 4,\ y = -2$.

$$\iint_Q ydxdy = \int_0^1 \int_{-\sqrt{4x}}^{\sqrt{4x}} ydydx + \int_1^4 \int_{2x-4}^{\sqrt{4x}} ydydx = \int_{-2}^{4} \int_{\frac{y^2}{4}}^{\frac{y+4}{2}} ydxdy = 9.$$

Ejemplo 4.22 *Calcular*

$$\iint_Q dxdy$$

si Q es la región limitada por el gráfico de las curvas $x = -2,\ y = 2,\ y = x,\ y = 0$ *fig 24.*



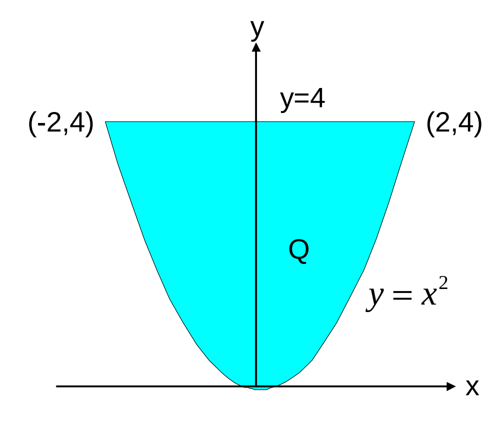
Soluciòn.

$$\iint\limits_{Q} dxdy = \int\limits_{-2}^{0}\int\limits_{0}^{2} dydx + \int\limits_{0}^{2}\int\limits_{x}^{2} dydx = \int\limits_{0}^{2}\int\limits_{-2}^{y} dxdy = 6.$$

Ejemplo 4.23 *Calcular*

$$\iint\limits_{Q} 3xdxdy$$

si Q es la región limitada por el gráfico de las curvas $y = x^2$, $y = 4$ fig 25.



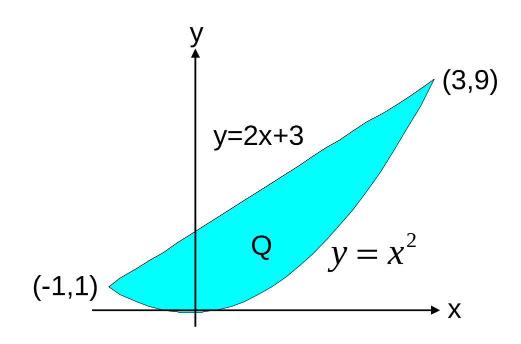
Solución.

$$\iint\limits_{Q} 3xdxdy = \int\limits_{0}^{4}\int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} 3xdxdy = \int\limits_{-2}^{2}\int\limits_{x^2}^{4} 3xdydx = 0$$

Ejemplo 4.24 *Calcular*

$$\iint\limits_{Q} dxdy$$

si Q es la región limitada por el gráfico de las curvas $y = x^2$, $y = 2x + 3$ fig 26.



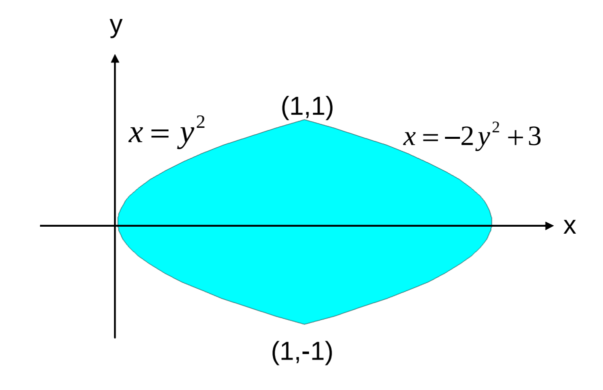
Solución. Para hallar los puntos de intersección $(-1,1),\ (3,9)$ iguale las curvas y

$$\iint_Q dxdy = \int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dxdy + \int_1^9 \int_{\frac{y-3}{2}}^{\sqrt{y}} dxdy = \frac{32}{3}.$$

Ejemplo 4.25 *Calcular*

$$\iint_Q x^2 dxdy$$

si Q es la región limitada por el gráfico de las curvas $x = y^2,\ x = -2y^2 + 3$ fig27.



Solución

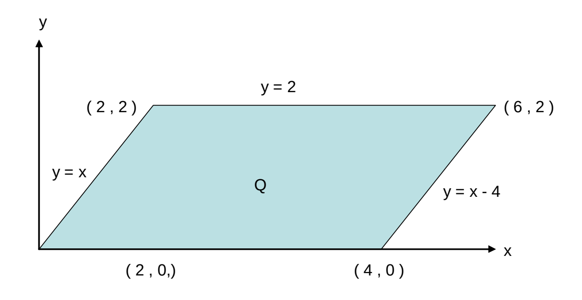
$$\iint_Q x^2 dxdy = \int_{-1}^1 \int_{y^2}^{3-2y^2} x^2 dxdy = \int_0^1 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} x^2 dydx + \int_1^3 \int_{-\sqrt{\frac{3-x}{2}}}^{\sqrt{\frac{3-x}{2}}} x^2 dydx = \frac{348}{35}$$

..

Ejemplo 4.26 *Calcular*

$$\iint_Q dxdy$$

si Q es la región limitada por el gráfico de las curvas $y = x,\ y = x - 4,\ y = 0,\ y = 2$ fig 27a.



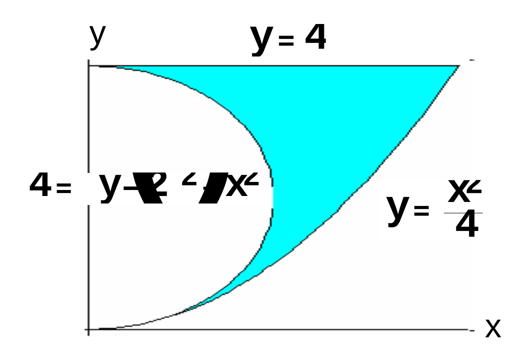
Solución

$$\iint\limits_{Q} dxdy = \int\limits_{0}^{2}\int\limits_{y}^{4+y} dxdy = \int\limits_{0}^{2}\int\limits_{0}^{x} dydx + \int\limits_{2}^{4}\int\limits_{0}^{2} dydx + \int\limits_{4}^{6}\int\limits_{x-4}^{2} dydx = 8$$

Ejemplo 4.27 *Calcular*

$$\iint\limits_{Q} xydxdy$$

si Q es la región limitada por el gráfico de las curvas $x \geq 0,\ x^2 + (y-2)^2 = 4$, $y = 4,\ y = \dfrac{x^2}{4}$ *fig 28*



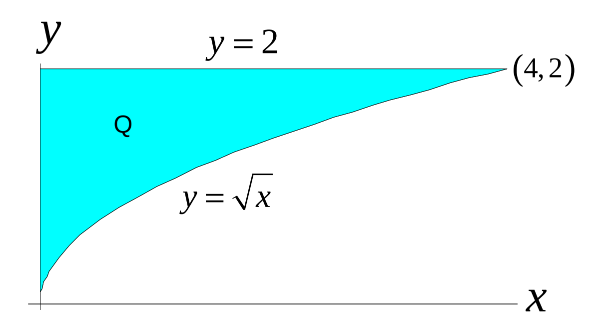
Solución.

$$\iint\limits_{Q} xydxdy = \int\limits_{2}^{4}\int\limits_{\frac{x^2}{4}}^{4} xydydx + \int\limits_{0}^{2}\int\limits_{\frac{x^2}{4}}^{2-\sqrt{4-x^2}} xydydx + \int\limits_{0}^{2}\int\limits_{2+\sqrt{4-x^2}}^{4} xydydx = \int\limits_{0}^{4}\int\limits_{\sqrt{4-(y-2)^2}}^{\sqrt{4y}} xydxdy = 32.$$

Ejemplo 4.28 *Calcular*

$$\iint\limits_{Q} \sin(y^3)dydx$$

si Q es la región limitada por el gráfico de las curvas $y = \sqrt{x}, x = 0,\; y = 2$ *fig 30*



Solución.

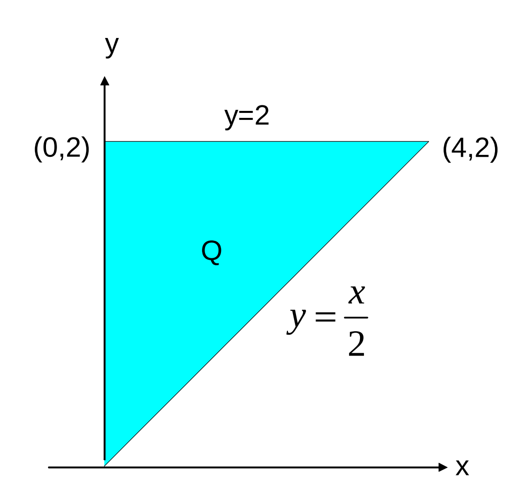
$$\iint\limits_{Q} \sin(y^3)dydx = \int\limits_{0}^{4}\int\limits_{\sqrt{x}}^{2} \sin(y^3)dydx \text{ (Dificil de solucionar)} =$$

$$\int\limits_{0}^{2}\int\limits_{0}^{y^2} \sin(y^3)dxdy = \int\limits_{0}^{2} \sin(y^3)\,[x]_0^{y^2}\,dy = \frac{1}{3}\int\limits_{0}^{2} 3y^2\sin(y^3)dy = \frac{1}{3}\int\limits_{0}^{8} \sin u du = \frac{1}{3}\,(1-\cos 8)$$

Ejemplo 4.29 *Calcular*

$$\iint\limits_{Q} e^{y^2}dydx$$

si Q es la región limitada por el gráfico de las curvas $y = \dfrac{x}{2},\; y = 2,\; x = 0$ *fig 31*



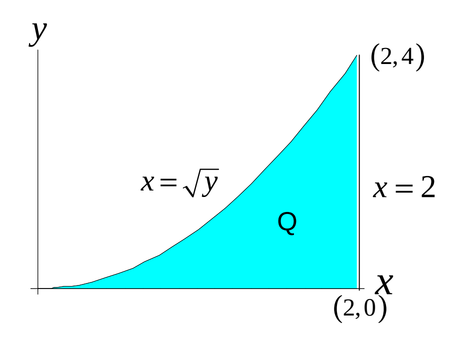
Solución.

$$\iint_Q e^{y^2}dydx = \int_0^4 \int_{\frac{x}{2}}^2 e^{y^2}dydx \quad = \int_0^2 \int_0^{2y} e^{y^2}dxdy = \int_0^2 e^{y^2}2ydy = e^4 - 1.$$

Ejemplo 4.30 *Calcular*

$$\iint_Q y\cos(x^5)dydx$$

si Q es la región limitada por el gráfico de las curvas $x=\sqrt{y}$ $y=0$, $x=2$ fig32



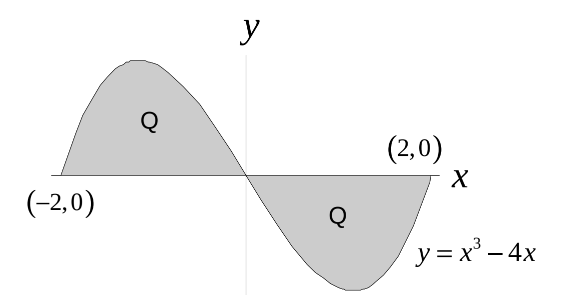
Solución.

$$\iint_Q y\cos(x^5)dydx = \int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 y\cos(x^5)dxdy \ = \int_0^2 \int_0^{x^2} y\cos(x^5)dydx = \int_0^2 \frac{x^4}{2}\cos(x^5)dx = \frac{\sin 32}{10}.$$

Ejemplo 4.31 *Calcular*

$$\iint\limits_{Q} dxdy$$

si Q es la región limitada por el gráfico de las curvas $y = x^3 - 4x$ y el eje x fig 33



Solución. $y = x^3 - 4x = x(x-2)(x+2)$, entonces los puntos de intersección de la curva con el eje x son $(-2,0), (0,0), (2,0)$, luego

$$\iint\limits_{Q} dxdy = \iint\limits_{Q_1} dxdy + \iint\limits_{Q_2} dxdy = \int_{-2}^{0}\int_{0}^{x^3-4x} dydx + \int_{0}^{2}\int_{x^3-4x}^{0} dydx = 8$$

El otro caso es dificil, pues hay que de $y = x^3 - 4x$ despejar x

Ejercicio 10 *Mostrar que*

1. $\int_0^2 \int_{x^2}^4 xe^{y^2} dydx = \frac{1}{4}e^{16} - \frac{1}{4}.$

2. $\int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^1 e^{x^2} dxdy = e - 1$

3. $\int_0^1 \int_{2y}^2 \cos x^2 dxdy = \frac{1}{4}\sin 4$

4. $\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2} dxdy = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}$

5. $\int\limits_{-2}^{2}\int\limits_{x^2}^{8-x^2} 3ydydx = 256 = \int\limits_{0}^{4}\int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} 3ydxdy + \int\limits_{4}^{8}\int\limits_{-\sqrt{8-y}}^{\sqrt{8-y}} 3ydxdy$

6. $\int\limits_{0}^{2}\int\limits_{\frac{y}{2}}^{3-y} 3xdxdy = \int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{2x} 3xdydx + \int\limits_{1}^{3}\int\limits_{0}^{3-x} 3xdydx = 12$

7. $\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{x} 3dydx + \int\limits_{1}^{2}\int\limits_{0}^{2-x} 3dydx = \int\limits_{0}^{1}\int\limits_{y}^{2-y} 3dxdy = 3$

8. $\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{x^2} xe^y dydx + \int\limits_{1}^{3}\int\limits_{0}^{\frac{3-x}{2}} xe^y dydx = \int\limits_{0}^{1}\int\limits_{\sqrt{y}}^{3-2y} xe^y dxdy = \frac{13}{2}e - 15$

9. $\iint\limits_{Q} |(y-x^2)|\, dxdy = \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{x^2} (x^2-y)\, dydx + \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{x^2}^{1} (y-x^2)\, dydx = \frac{12}{5}$ si $Q = [-1,1]\times[-1,1]$

10. $\iint\limits_{Q} [x+y]\, dxdy = \int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{1-y} 0dxdy + \int\limits_{0}^{1}\int\limits_{1-y}^{2-y} 1dxdy + \int\limits_{0}^{1}\int\limits_{2-y}^{2} 2dxdy + \int\limits_{1}^{2}\int\limits_{0}^{2-y} 1dxdy + \int\limits_{1}^{2}\int\limits_{2-y}^{3-y} 2dxdy + \int\limits_{1}^{2}\int\limits_{3-y}^{2} 3dxdy = 6$ *si* $Q = [0,2]\times[0,2]$ y $[x+y] =$ parte entera de $x+y$

11. $\iint\limits_{Q} dxdy = \int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dydx = \int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{1} abrdrd\theta = \pi ab$ si Q es la regiòn limitada por el gràfico de $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

12. Calcular la integral $\iint\limits_{Q} xe^y dxdy = \int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{1} xe^y dxdy = \frac{e-1}{2}$ $\quad Q = [0,1]\times[0,1]$

13. Calcular la integral $\iint\limits_{Q} (\sin y)e^x dxdy = \int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{\pi} (\sin y)e^x dydx = (1-\cos\pi)(e-1)$ $\quad Q = [0,1]\times[0,\pi]$

14. Calcular la integral $\iint\limits_{Q} \left(\dfrac{y\ln^2 x \sin y^2}{x}\right) dxdy = \int\limits_{1}^{2}\int\limits_{0}^{2} \dfrac{y\ln^2 x \sin y^2}{x} dydx = (1-\cos 4)\frac{\ln^3 2}{6}$

$Q = [1,2]\times[0,2]$

15. $\iint_Q x dy dx = \int_{-2}^{0}\int_{-1}^{x^2+1} x dy dx + \int_{0}^{1}\int_{-1}^{-\sqrt{x}} x dy dx + \int_{0}^{1}\int_{\sqrt{x}}^{x^2+1} x dy dx = -\frac{151}{20}$ Si Q está limitada por las graficas de $y = x^2+1, x = y^2$, $x = -2$, $y = -1$, $x = 1$, region conteniendo al punto $(-1, 0)$

16. $\iint_Q dy dx = \int_{-2}^{3}\int_{y^2}^{y+6} dx dy = \frac{125}{6}$ Si Q está limitada por las graficas de $y = x - 6, x = y^2$

17. $\iint_Q dy dx = \int_{0}^{1}\int_{0}^{x^2} dy dx = \frac{1}{3}$ Si Q está limitada por las graficas de $y = 0, y = x^2$, $x = 1$

18. $\int_0^1\int_x^1 \sin y^2 dy dx = \int_0^1\int_0^y \sin y^2 dx dy = \frac{1-\cos 1}{2}$

19. $\int_0^1\int_{3y}^3 e^{x^2} dx dy = \int_0^3\int_0^{\frac{x}{3}} e^{x^2} dy dx = \frac{e^9-1}{6}$

20. $\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^3+1} dx dy = \int_0^1\int_0^{x^2} \sqrt{x^3+1} dy dx = \frac{4}{9}\sqrt{2} - \frac{2}{9}$

21. $\int_0^3\int_{y^2}^9 y \cos x^2 dx dy = \int_0^9\int_0^{\sqrt{x}} y \cos x^2 dy dx = \dfrac{\sin 81}{4}$

22. $\int_0^1\int_{x^2}^1 x^3 \sin y^3 dy dx = \int_0^1\int_0^{\sqrt{y}} x^3 \sin y^3 dx dy = \frac{1}{12} - \frac{1}{12}\cos 1$

23. $\int_0^1\int_x^1 e^{\frac{x}{y}} dy dx = \int_0^1\int_0^y e^{\frac{x}{y}} dx dy = \dfrac{e-1}{2}$

24. $\int_0^8\int_{\sqrt[3]{y}}^2 e^{x^4} dx dy = \int_0^2\int_0^{x^3} e^{x^4} dy dx = \dfrac{e^{16}-1}{4}$

25. $\int_0^1\int_{y^2}^1 y \sin x^2 dx dy = \int_0^1\int_0^{\sqrt{x}} y \sin x^2 dy dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos 1$

26. $\int_0^1\int_x^1 e^{y^2} dy dx = \int_0^1\int_0^y e^{y^2} dx dy = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}$

27. $\int_1^4 \int_0^{\sqrt{x}} e^{\frac{y}{\sqrt{x}}} dydx = \int_0^1 \int_1^4 e^{\frac{y}{\sqrt{x}}} dxdy + \int_1^2 \int_{y^2}^4 e^{\frac{y}{\sqrt{x}}} dxdy = (e-1)\frac{14}{3}$

28. $\int_0^\pi \int_x^\pi \frac{\sin y}{y} dydx = \int_0^\pi \int_0^y \frac{\sin y}{y} dxdy = 2$

29. $\int_0^3 \int_{\sqrt{\frac{x}{3}}}^1 e^{y^3} dydx = \int_0^1 \int_0^{3y^2} e^{y^3} dxdy = e - 1$

30. $\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{1}{y^4+1} dydx = \int_0^2 \int_0^{y^3} \frac{1}{y^4+1} dxdy = \frac{1}{4}\ln 17$

31. $\int_0^{\frac{1}{16}} \int_{\sqrt[4]{y}}^{\frac{1}{2}} \cos x^5 dxdy = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{x^4} \cos x^5 dydx = \frac{1}{5}\sin\frac{1}{32}$

32. $\int_0^1 \int_x^1 \frac{1}{y}\sin y \cos\left(\frac{x}{y}\right) dydx = \int_0^1 \int_0^y \frac{1}{y}\sin y\cos\left(\frac{x}{y}\right) dxdy = \sin 1(1-\cos 1)$

33. $\int_0^2 \int_y^2 \sin x^2 dxdy = \int_0^2 \int_0^x \sin x^2 dydx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4$

34. $\int_0^2 \int_{y^2}^4 \sqrt{x}\sin x dxdy = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} \sqrt{x}\sin x dydx = \sin 4 - 4\cos 4$

35. $\int_0^1 \int_x^1 x\sqrt{1+y^3} dydx = \int_0^1 \int_0^y x\sqrt{1+y^3} dxdy = \frac{2}{9}\sqrt{2} - \frac{1}{9}$

36. $\int_1^2 \int_0^{\ln x} f(x,y) dydx = \int_0^{\ln 2} \int_{e^y}^2 f(x,y) dxdy$

37. $\int_0^1 \int_{y^2}^{2-y} f(x,y) dxdy = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} f(x,y) dydx + \int_1^2 \int_0^{2-x} f(x,y) dydx$

38. $\int_{-1}^0 \int_{-\sqrt{y+1}}^{\sqrt{y+1}} f(x,y) dxdy = \int_{-1}^1 \int_{x^2-1}^0 f(x,y) dydx$

39. $\int_0^4 \int_{-\sqrt{4-y}}^{\frac{(y-4)}{2}} f(x,y) dxdy = \int_{-2}^0 \int_{2x+4}^{4-x^2} f(x,y) dydx$

40. $\int_0^4 \int_{\frac{y}{2}}^2 f(x,y)dxdy = \int_0^2 \int_0^{2x} f(x,y)dydx$

41. $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)dydx = \int_{-1}^0 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dxdy + \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,y)dxdy$

42. $\int_0^1 \int_{-y}^y f(x,y)dxdy = \int_{-1}^0 \int_{-x}^1 f(x,y)dydx + \int_0^1 \int_x^1 f(x,y)dydx$

43. $\int_0^1 \int_0^y f(x,y)dxdy + \int_1^2 \int_0^{2-y} f(x,y)dxdy = \int_0^1 \int_x^{2-x} f(x,y)dydx$

44. $\int_0^1 \int_0^{2y} f(x,y)dxdy + \int_1^3 \int_0^{3-y} f(x,y)dxdy = \int_0^2 \int_{\frac{x}{2}}^{3-x} f(x,y)dydx$

45. $\int_0^1 \int_{-\sqrt{\frac{y}{2}}}^{\sqrt{\frac{y}{2}}} f(x,y)dxdy + \int_1^2 \int_{-\sqrt{\frac{y}{2}}}^{-\sqrt{y-1}} f(x,y)dxdy + \int_1^2 \int_{\sqrt{y-1}}^{\sqrt{\frac{y}{2}}} f(x,y)dxdy = \int_{-1}^1 \int_{2x^2}^{1+x^2} f(x,y)dydx$

46. Que región del plano maximiza el valor de la integal

$$\iint_Q (9 - x^2 - y^2)dydx \quad \text{Respuesta } x^2 + y^2 \leq 9$$

47. Que región del plano maximiza el valor de la integal

$$\iint_Q (5 - \sqrt{x^2 + y^2})dydx \quad \textit{Respuesta} \;\; x^2 + y^2 \leq 25$$

48. Que región del plano minimiza el valor de la integal

$$\iint_Q (\sqrt{x^2 + y^2} - 4)dydx \quad \text{Respuesta } x^2 + y^2 \leq 16$$

49. Que región del plano minimiza el valor de la integal $\iint_Q (x^2+y^2-4)dydx$ Respuesta $x^2 + y^2 \leq 4$

Capítulo 5

Integrales triples.

5.1 Introducción

En este capítulo se hace un tratado de las integrales triples, sus propiedades, los tipos de regiones y finalmente una variedad de ejemplos resueltos, para observar las diversas formas de como calcular una integral triple. Las Integrales triples se definen de manera análoga a las Integrales dobles. El cambio de orden de integración en una integral triple es un poco más complicado. La integral

$$\iint_Q f(x,y)dxdy$$

se calculó sobre una región cerrada y acotada del plano xy. En forma análoga la integral triple

$$\iiint_S f(x,y,z)dzdydx$$

se calcula sobre una región S, sólida, cerrada y acotada del espacio R^3.

5.2 Defnición de Integral Triple

Si $f(x,y,z)$ es una función definida en S, entonces la integral triple de $f(x,y,z)$ sobre S, se define por :

$$\iiint_S f(x,y,z)dzdydx = \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\lim_{p\to\infty}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} f(x_i\ ,y_j,z_k\ )\ \Delta z_k\ \Delta x_i\ \Delta y_j$$

siempre y cuando este límite exista. Al igual que en las integrales dobles, el cálculo de integrales triples, usando la definición es compleja y por ello buscaremos mecanismos más prácticos.

5.2.1 Propiedades.

1. $\iiint\limits_S (\alpha f(x,y,z) \pm \beta\ g(x,y,z))dzdydx = \alpha \iiint\limits_S f(x,y,z)dzdydx \pm \beta \iiint\limits_S g(x,y,z)dzdydx.\ \alpha, \beta \in$

2.Si $f(x,y,z) \geq g(x,y,z)$ en S entonces $\iiint\limits_S f(x,y,z)dzdydx \geq \iiint\limits_S g(x,y,z)dzdydx$

3. si $S = \cup S_i$ (no se solapan) entonces

$$\iiint\limits_S f(x,y,z)dzdydx = \iiint\limits_{S_1} f(x,y,z)dzdydx + \iiint\limits_{S_2} f(x,y,z)dzdydx + ... + \iiint\limits_{S_n} f(x,y,z)dzdydx$$

5.2.2 Tipos de Regiones

1. Integración sobre un paralelipípedo. Si $f(x,y,z)$ es continua en $S = [a,b] \times [c,d] \times [m,n]$, la integral triple

$$\iiint\limits_S f(x,y,z)dzdydx$$

se puede calcular así

$$\iiint\limits_S f(x,y,z)dzdydx = \int_a^b \int_c^d \int_m^n f(x,y,z)dzdydx = \int_c^d \int_a^b \int_m^n f(x,y,z)dzdxdy =$$

$$= \int_m^n \int_c^d \int_a^b f(x,y,z)dxdydz = \int_c^d \int_m^n \int_a^b f(x,y,z)dxdzdy$$

o en cualquier orden con el necesario ajuste en los límites de integración. La integral

$$\int_a^b \int_c^d \int_m^n f(x,y,z)dzdydx$$

se calcula, primero integrando

$$\int_m^n f(x,y,z)dz$$

manteniendo fijos a x y a y. El resultado se integra respecto a y, manteniendo fijo a x, y finalmente se integra con respecto a x. En forma análoga se calculan las otras 5 integrales.

Ejemplo 5.1 *Calcular*

$$\iiint_S xy^3z^2dzdydx \quad si \quad S = [-1,3] \times [1,4] \times [0,2] \,.$$

Solución. Usaremos dos de las 6 posibilidades para el cálculo de la integral.

i) $$\iiint_S xy^3z^2dzdydx = \int_1^4 \int_{-1}^3 \int_0^2 xy^3z^2dzdxdy = \int_1^4 \int_{-1}^3 \left[xy^3\frac{z^3}{3}\right]_0^2 dxdy = \int_1^4 \int_{-1}^3 \frac{8}{3}xy^3dxdy =$$

$$= \frac{8}{3}\int_1^4 \left[\frac{x^2}{2}y^3\right]_{-1}^3 dy = \frac{8}{3}\int_1^4 \left(\frac{9}{2}-\frac{1}{2}\right)y^3dy = \frac{8*4}{3}\int_1^4 y^3dy = \left[\frac{32}{3}\frac{y^4}{4}\right]_1^4 = 680.$$

ii) $$\iiint_S xy^3z^2dzdydx = \int_1^4 \int_0^2 \int_{-1}^3 xy^3z^2dxdzdy = \int_1^4 \int_0^2 \left[y^3z^2\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^3 dzdy = \int_1^4 \int_0^2 y^3z^2\left(\frac{9}{2}-\frac{1}{2}\right)dzdy =$$

$$= 4\int_1^4 \int_0^2 y^3z^2dzdy = 4\int_1^4 \left[y^3\frac{z^3}{3}\right]_0^2 dy = \frac{32}{3}\left[\frac{y^4}{4}\right]_1^4 = \frac{32}{3}\cdot\frac{1}{4}(256-1) = 680$$

2. Integrales triples sobre regiones más generales.

$$S = \{(x,y,z)/a \le x \le b, q(x) \le y \le h(x), g(x,y) \le z \le k(x,y)\}$$

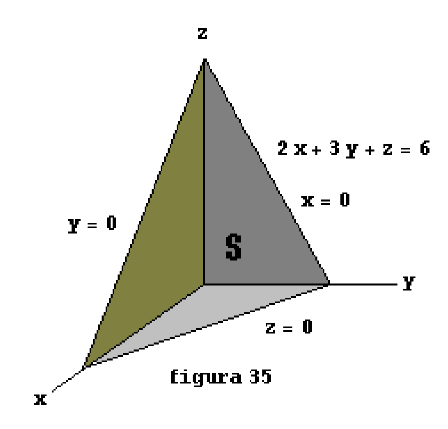
entonces

$$\iiint_S f(x,y,z)dzdydx = \int_a^b \int_{q(x)}^{h(x)} \int_{g(x,y)}^{k(x,y)} f(x,y,z)dzdydx.$$

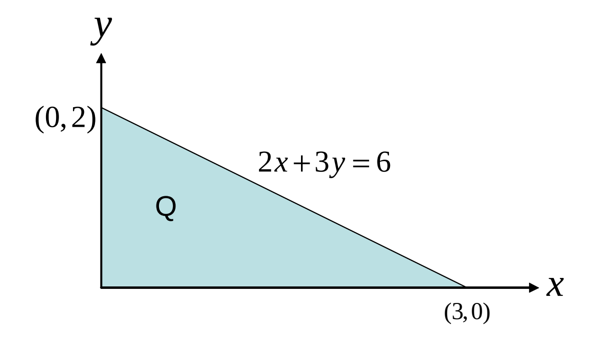
Ejemplo 5.2 *Calcular*

$$\iiint_S (2x+3y)\,dzdydx$$

si S está limitado por el gráfico de las superficies $2x+3y+z=6$, $z=0$, $x=0$, $y=0$ *fig35.*



i. Proyectando el sólido en el plano xy fig 36, se tiene que

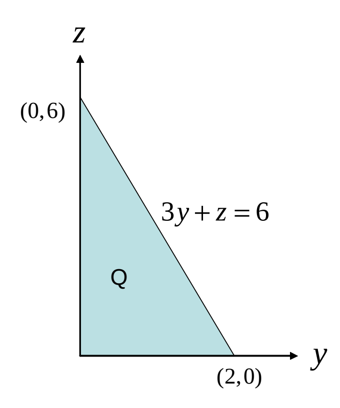


$$\iiint_S (2x+3y)\,dzdydx = \iint_Q \left[\int_0^{6-2x-3y} (2x+3y)\ dz\right] dydx = \int_0^3 \int_0^{2-\frac{2x}{3}} \int_0^{6-2x-3y} (2x+3y)\ dzdydx =$$

$$\int_0^3 \int_0^{2-\frac{2x}{3}} [[2x+3y]\,z]_0^{6-2x-3y}\,dydx = \int_0^3 \int_0^{2-\frac{2x}{3}} (2x+3y)\,(6-2x-3y)\,dydx =$$

$$= \int_0^3 \int_0^{2-\frac{2x}{3}} \left(12x - 4x^2 - 12xy + 18y - 9y^2\right) dydx = 18$$

ii. Proyectando el sólido en el plano yz fig 37, se tiene que



$$\iiint_S (2x+3y)\,dzdydx = \iint_R \left[\int_0^{\frac{6-3y-z}{2}} (2x+3y)\ dx\right] dydz = \int_0^6 \int_0^{\frac{6-z}{3}} \int_0^{\frac{6-3y-z}{2}} (2x+3y)\ dxdydz = 18$$

Ejemplo 5.3 *Calcular*

$$\iiint_S (z+1)\,dzdydx$$

si S está limitado por el gráfico de la superficie $x^2+y^2+z^2=a^2$ fig 38.

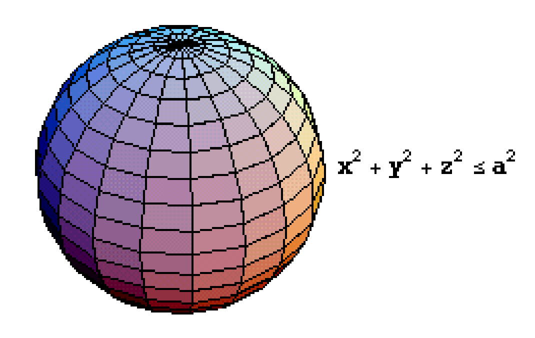
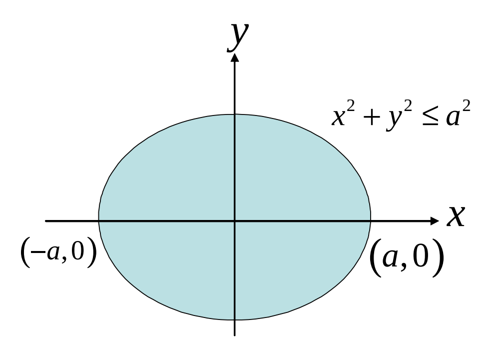


figura 38

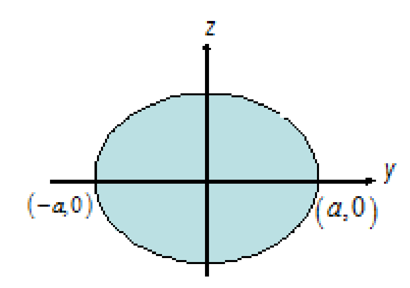
i. Proyectando el sólido en el plano xy fig 39, se tiene que



$$\iiint_S (z+1)\,dzdydx = \int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} (z+1)\,dzdydx =$$

$$= \int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}}\int_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} (z+1)\,dzdxdy = \frac{4}{3}\pi a^3$$

ii. Proyectando el sólido en el plano yz fig 40, se tiene que



$$\iiint_S (z+1)\,dzdydx = \int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-z^2}}^{\sqrt{a^2-z^2}}\int_{-\sqrt{a^2-z^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-z^2-y^2}} (z+1)\,dxdydz$$

$$= \int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}}\int_{-\sqrt{a^2-z^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-z^2-y^2}} (z+1)\,dxdzdy = \frac{4}{3}\pi a^3$$

Ejemplo 5.4 *Calcular*

$$\iiint_S (x+y+z)\,dzdxdy$$

si S está limitado por el gráfico de las superficies $z+y=6$, $x=4$, $y=0$, $z=0$, $x=0$ fig 41

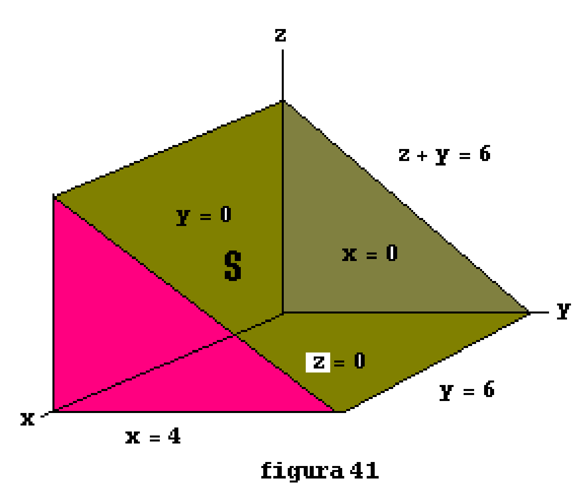
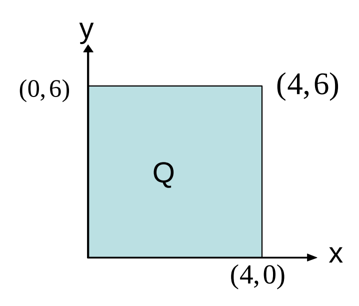


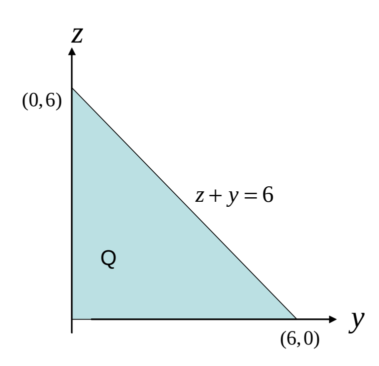
figura 41

Solución i. Proyectando el sólido en el plano xy fig 42, se tiene que



$$\iiint_S (x+y+z)\,dzdxdy = \int_0^4\int_0^6\int_0^{6-y}(x+y+z)\,dzdydx = \int_0^6\int_0^4\int_0^{6-y}(x+y+z)\,dzdxdy = 432$$

ii. Proyectando el sólido en el plano yz fig 43, se tiene que



$$\iiint_S (x+y+z)\,dzdxdy = \int_0^6 \int_0^{6-z} \int_0^4 (x+y+z)\,dxdydz = \int_0^6 \int_0^{6-y} \int_0^4 (x+y+z)\,dxdzdy = 432$$

iii. Proyectando el sólido en el plano xz,se tiene que

$$\iiint_S (x+y+z)\,dzdxdy = \int_0^4 \int_0^6 \int_0^{6-z} (x+y+z)\,dydzdx = \int_0^6 \int_0^4 \int_0^{6-z} (x+y+z)\,dydxdz = 432.$$

Ejemplo 5.5 *Calcular*

$$\iiint_S dzdxdy$$

Si S *está limitado por el gráfico de las superficies* $y = x^2, y + z = 1,\ y\ \ z = 0.$

i . Proyectando el sólido S en el plano xy, se tiene que

$$\iiint_S dzdxdy = \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 \int_0^{1-y} dzdydx = \int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \int_0^{1-y} dzdxdy$$

ii.Proyectando el sólido S en el plano yz, se tiene que :

$$\iiint_S dzdxdy = \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dxdydz = \int_0^1 \int_0^{1-y} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dxdzdy$$

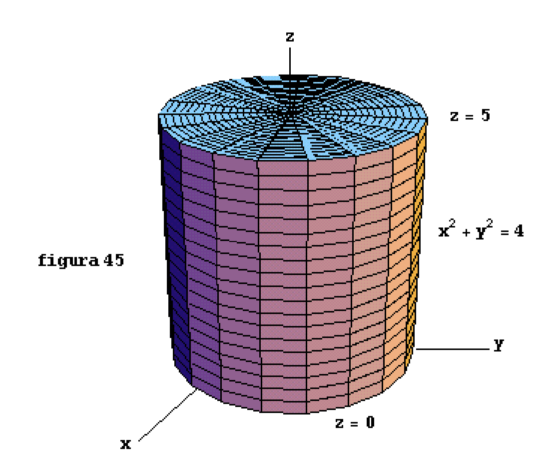
ii.Proyectando el sólido S en el plano xz, se tiene que :

$$\iiint_S dzdxdy = \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-z}}^{\sqrt{1-z}} \int_{x^2}^{1-z} dydxdz = \int_{-1}^{1} \int_0^{1-x^2} \int_{x^2}^{1-z} dydzdx$$

Ejemplo 5.6 *Calcular*

$$\iiint_S (x+z)\, dzdxdy$$

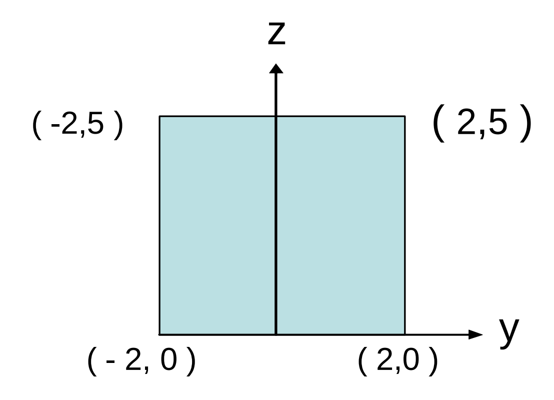
si el sólido S está limitado por el gráfico de las superficies $x^2+y^2=4$, $z=0$, $z=5$ fig 45



Solución i . Proyectando el sólido S en el plano xy fig 46, se tiene que

$$\iiint_S (x+z)\, dzdxdy = \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^5 (x+z)\, dzdydx = \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \int_0^5 (x+z)\, dzdxdy = 0$$

ii.Proyectando el sólido S en el plano yz fig 47, se tiene que :



$$\iiint\limits_S (x+z)\,dzdxdy = \int_0^5\int_{-2}^2\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} (x+z)\,dxdydz = \int_{-2}^2\int_0^5\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} (x+z)\,dxdzdy = 0$$

Ejemplo 5.7 *Calcular*

$$\iiint\limits_S dzdxdy$$

si el sólido S está limitado por el gráfico de las superficies $x^2+y^2=z$, $z=9$ fig 49

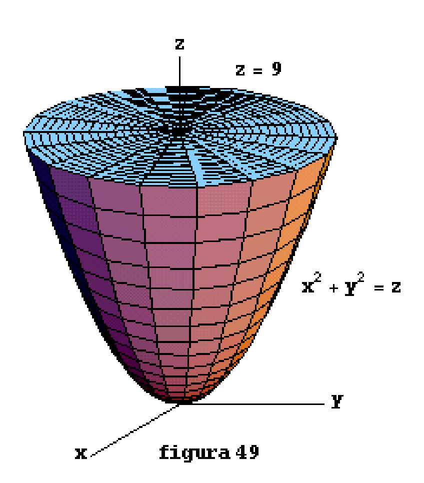
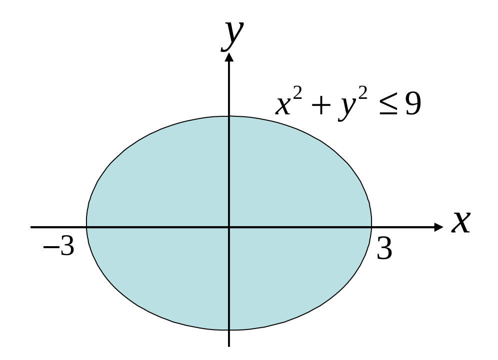


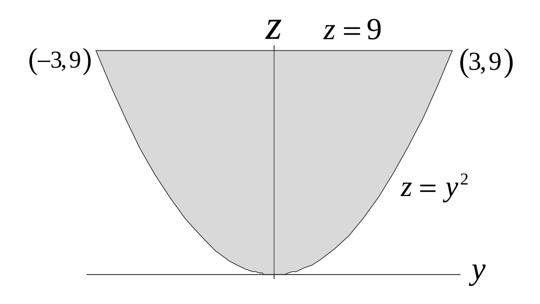
figura 49

Solución i. Proyectando el sólido S en el plano xy fig 50, se tiene que:



$$\iiint\limits_S dzdxdy = \int_{-3}^{3} \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{9} dzdydx = \int_{-3}^{3} \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} \int_{x^2+y^2}^{9} dzdxdy = \frac{81}{2}\pi$$

ii Proyectando el sólido S en el plano yz fig 51, se tiene que :



$$\iiint\limits_S dzdxdy = \int_{0}^{9} \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \int_{-\sqrt{z-y^2}}^{\sqrt{z-y^2}} dxdydz = \int_{-3}^{3} \int_{y^2}^{9} \int_{-\sqrt{z-y^2}}^{\sqrt{z-y^2}} dxdzdy = \frac{81}{2}\pi$$

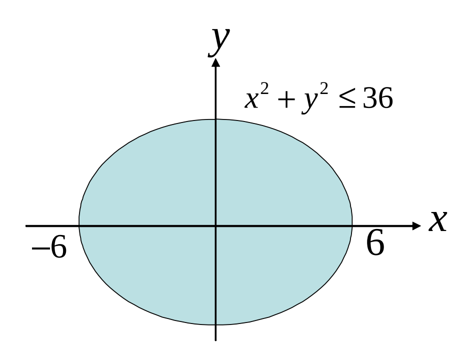
Ejemplo 5.8 *Calcular*

$$\iiint\limits_S x^2 dzdxdy$$

si el sólido S está limitado por el gráfico de las superficies

$$x^2 + y^2 = 36, y + z = 9, \ z = 0.$$

Solución i). Proyectando el sólido S en el plano xy fig 53, se tiene que:



$$\iiint\limits_S x^2 dz dx dy = \int_{-6}^{6}\int_{-\sqrt{36-x^2}}^{\sqrt{36-x^2}}\int_{0}^{9-y} x^2 dz dy dx = \int_{-6}^{6}\int_{-\sqrt{36-y^2}}^{\sqrt{36-y^2}}\int_{0}^{9-y} x^2 dz dx dy = 2916\pi$$

ii. Proyectando el sólido S en el plano yz fig 54, se tiene que :

$$\iiint\limits_S x^2 dz dx dy = \int_{0}^{3}\int_{-6}^{6}\int_{-\sqrt{36-y^2}}^{\sqrt{36-y^2}} x^2 dx dy dz + \int_{3}^{15}\int_{-6}^{9-z}\int_{-\sqrt{36-y^2}}^{\sqrt{36-y^2}} x^2 dx dy dz = 2916\pi$$

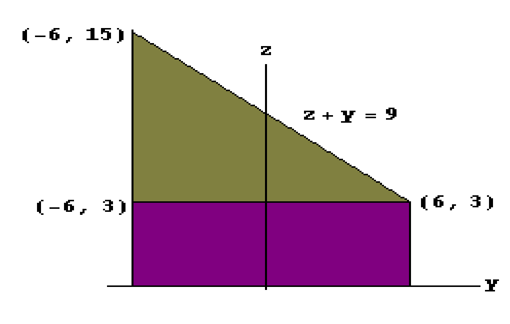


figura 54

ii Proyectando el sólido S en el plano xz fig 55, se tiene que :

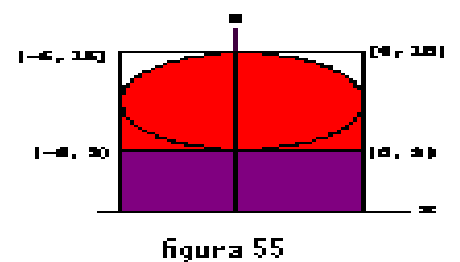


figura 55

$$\iiint_S x^2 dzdxdy = \int_0^3 \int_{-6}^{6} \int_{-\sqrt{36-x^2}}^{\sqrt{36-x^2}} x^2 dydxdz + \int_3^{15} \int_{-\sqrt{36-(9-z)^2}}^{\sqrt{36-(9-z)^2}} \int_{-\sqrt{36-x^2}}^{9-z} x^2 dydxdz +$$

$$+ \int_3^9 \int_{-6}^{-\sqrt{36-(9-z)^2}} \int_{-\sqrt{36-x^2}}^{\sqrt{36-x^2}} x^2 dydxdz + \int_3^9 \int_{\sqrt{36-(9-z)^2}}^{6} \int_{-\sqrt{36-x^2}}^{\sqrt{36-x^2}} x^2 dydxdz = 2916\pi$$

Ejemplo 5.9 *Calcular*

$$\iiint_S xdzdxdy$$

si el sólido S está limitado por el gráfico de las superficies $z = 0$, $z = x$, $y^2 = 4 - x$, fig 56.

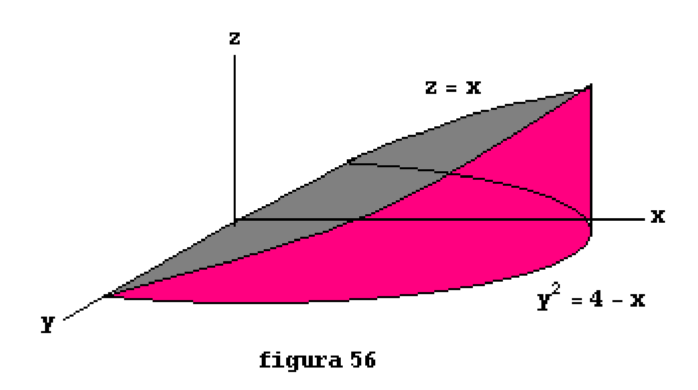
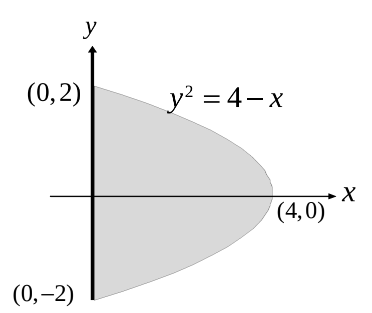


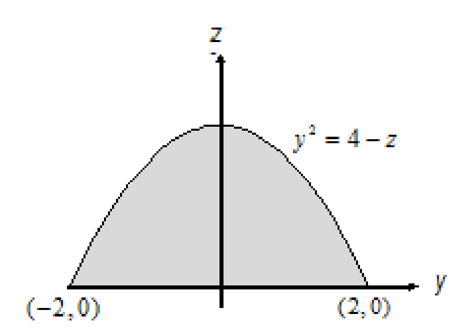
figura 56

Solución i Proyectando el sólido S en el plano xy fig 57, se tiene que:



$$\iiint_S xdzdxdy = \int_0^4 \int_{-\sqrt{4-x}}^{\sqrt{4-x}} \int_0^x xdzdydx = \int_{-2}^{2} \int_0^{4-y^2} \int_0^x xdzdxdy = \frac{4096}{105}$$

ii. Proyectando el sólido S en el plano yz fig 58, se tiene que :



$$\iiint_S x\ dzdxdy = \int_0^4 \int_{-\sqrt{4-z}}^{\sqrt{4-z}} \int_z^{4-y^2} x\ dxdydz = \int_{-2}^{2} \int_0^{4-y^2} \int_z^{4-y^2} x\ dxdzdy = \frac{4096}{105}$$

iii.Proyectando el sólido S en el plano xz fig 59, se tiene que :

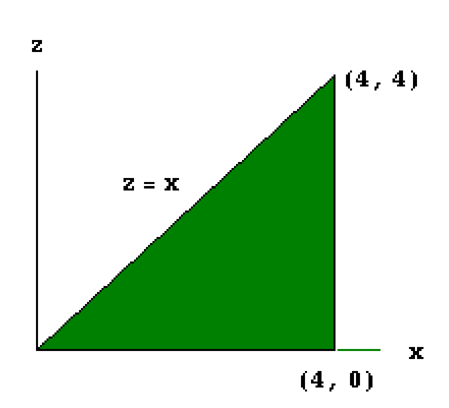


figura 59

$$\iiint_S x\ dzdxdy = \int_0^4 \int_0^x \int_{-\sqrt{4-x}}^{\sqrt{4-x}} x\ dydzdx = \int_0^4 \int_z^4 \int_{-\sqrt{4-x}}^{\sqrt{4-x}} x\ dydxdz = \frac{4096}{105}$$

Ejemplo 5.10 *Calcular*

$$\iiint_S zdzdxdy$$

si el sólido S está limitado por el gráfico de las superficies $z = 0, z = 5$, $y = 9$, $y = x^2$ *fig 60*

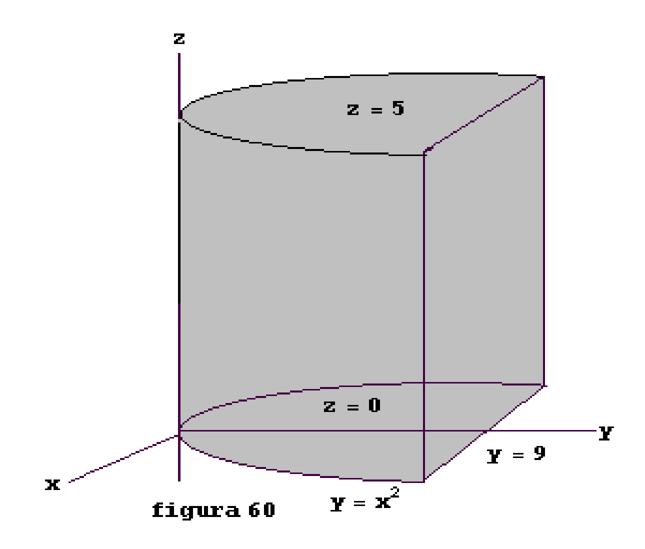
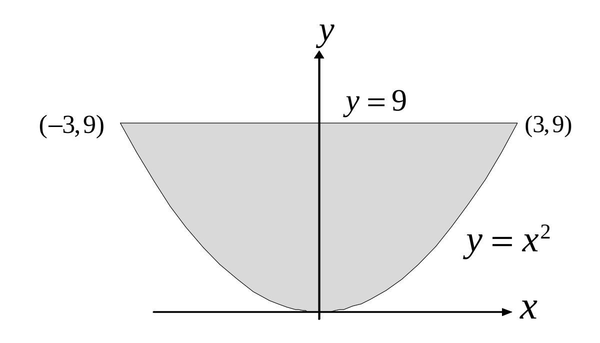


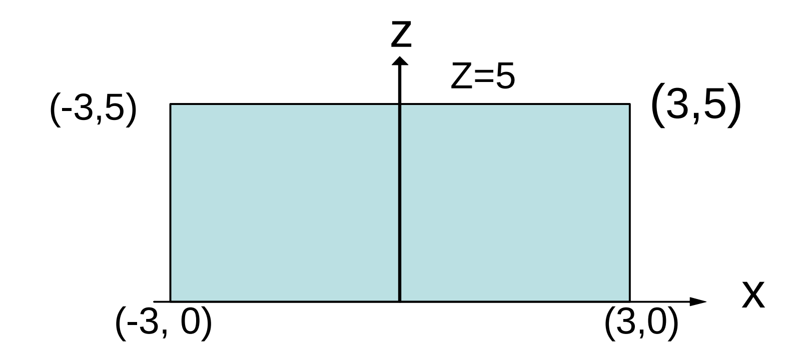
figura 60

Solución i. Proyectando el sólido S en el plano xy fig 61, se tiene que:



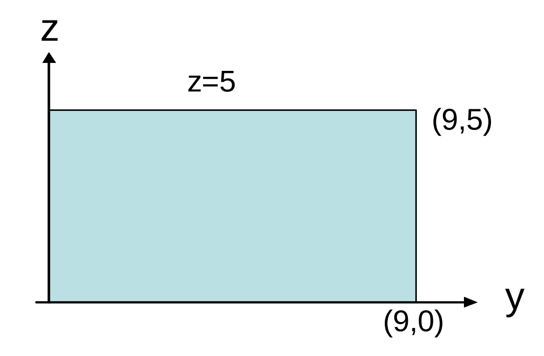
$$\iiint_S zdzdxdy = \int_{-3}^{3}\int_{x^2}^{9}\int_{0}^{5} zdzdydx = \int_{0}^{9}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\int_{0}^{5} zdzdxdy = 450$$

ii. Proyectando el sólido S en el plano xz fig 62, se tiene que



$$\iiint_S z\ dzdxdy = \int_0^5 \int_{-3}^3 \int_{x^2}^9 z\ dydxdz = \int_{-3}^3 \int_0^5 \int_{x^2}^9 z\ dydzdx = 450$$

iii.Proyectando el sólido S en el plano yz fig 63, se tiene que :



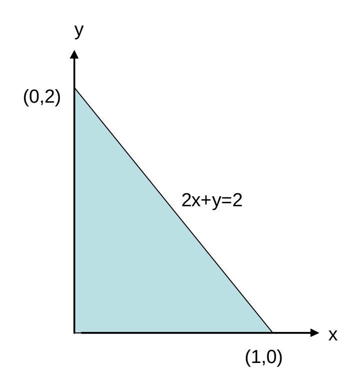
$$\iiint_S z\ dzdxdy = \int_0^5 \int_0^9 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} z\ dxdydz = \int_0^9 \int_0^5 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} z\ dxdzdy = 450$$

Ejemplo 5.11 *Calcular*

$$\iiint_S ydzdxdy$$

si el sólido S está limitado por el gráfico de las superficies $z = x^2 + y^2 + 1$, $x = 0$, $y = 0$, $2x + y = 2$, $z = 0$.

Solución i. Proyectando el sólido S en el plano xy fig 65, se tiene que:



$$\iiint_S ydzdxdy = \int_0^1 \int_0^{2-2x} \int_0^{x^2+y^2+1} ydzdydx = \int_0^2 \int_0^{\frac{2-y}{2}} \int_0^{x^2+y^2+1} ydzdxdy = \frac{23}{15}$$

ii. Proyectando el sólido S en el plano yz fig 66, se tiene que :

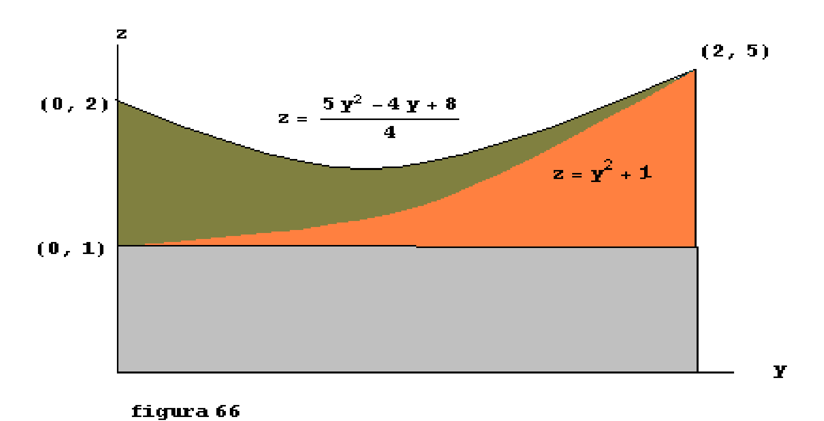


figura 66

$$\iiint_S y\,dzdxdy = \int_0^2 \int_0^1 \int_0^{\frac{2-y}{2}} y\,dxdzdy + \int_0^2 \int_{y^2+1}^{\frac{5y^2-4y+8}{4}} \int_{\sqrt{z-1-y^2}}^{\frac{2-y}{2}} y\,dxdzdy + \int_0^2 \int_1^{y^2+1} \int_0^{\frac{2-y}{2}} y\,dxdzdy = \frac{23}{15}$$

Ejemplo 5.12 *Calcular*

$$\iiint_S x^2 dzdxdy$$

si S es el sólido limitado por las superficies $3z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 + z^2 = 4$ *(interior a* $3z = x^2 + y^2$ *) fig 67.*

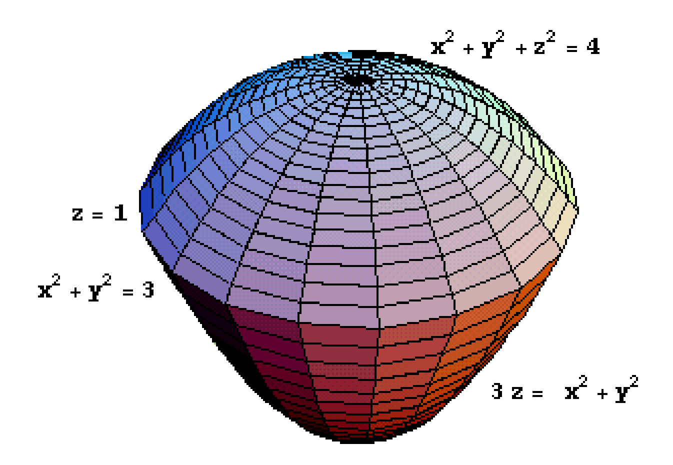


figura 67

Solución i Proyectemos el sólido S en el plano xy. Hallemos la curva de intersección de las superficies $3z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Como $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ entonces $3z + z^2 = 4$, luego $z^2 + 3z - 4 = 0 = (z+4)(z-1)$, es decir, $z = -4, z = 1$, entonces $x^2 + y^2 = 3z = 3.1 = 3$ la curva de intersección en $z = 1$, así la proyección en el plano xy es $\{(x,y)/x^2 + y^2 \leq 3\}$ y

$$\iiint_S x^2 dzdxdy = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}} \int_{(x^2+y^2)/3}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} x^2 dzdydx = \frac{49}{30}\pi$$

ii. Proyectando el sólido S en el plano yz fig 68, se tiene que :

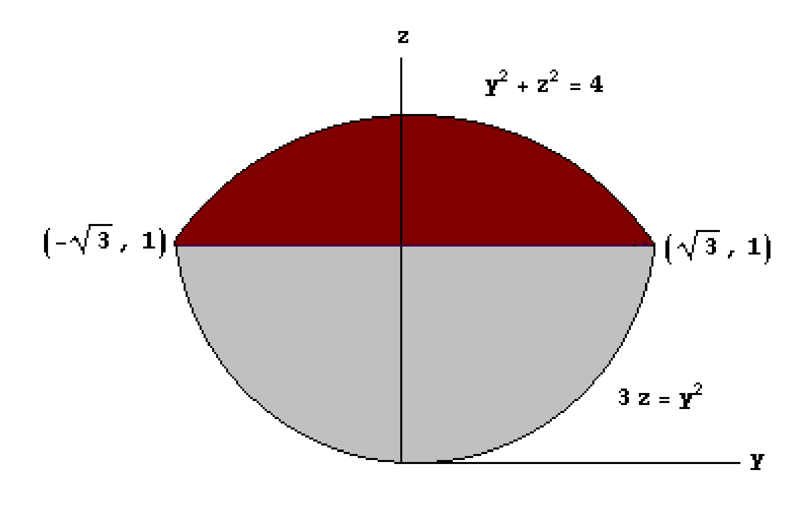


figura 68

$$\iiint\limits_S x^2 dz dx dy = \int\limits_1^2 \int\limits_{-\sqrt{4-z^2}}^{\sqrt{4-z^2}} \int\limits_{-\sqrt{4-y^2-z^2}}^{\sqrt{4-y^2-z^2}} x^2 dx dy dz + \int\limits_0^1 \int\limits_{-\sqrt{3z}}^{\sqrt{3z}} \int\limits_{-\sqrt{3z-y^2}}^{\sqrt{3z-y^2}} x^2 dx dy dz$$

b.Considere el ejemplo anterior y considere S el sólido exterior fig 69

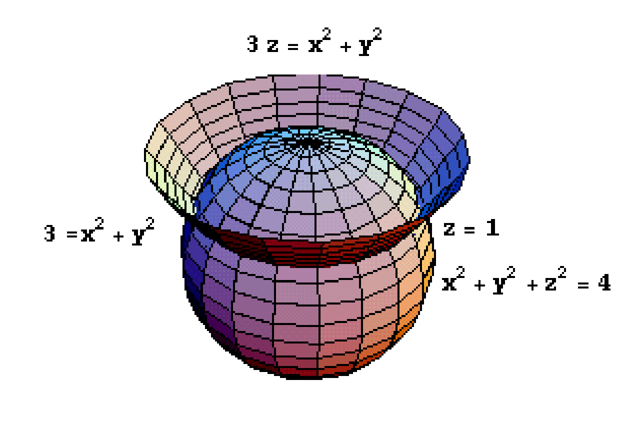
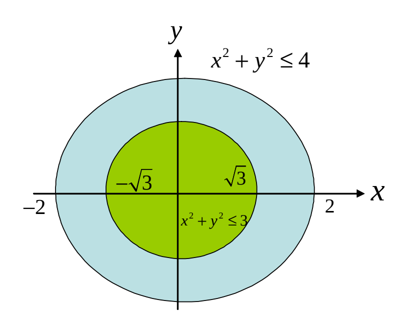


figura 69

i. Proyectando el sólido S en el plano xy fig 70, se tiene



$$\iiint\limits_S x^2dzdxdy = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\int_{-\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}}\int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\left(x^2+y^2\right)/3} x^2dzdydx + \int_{-2}^{-\sqrt{3}}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} x^2dzdydx$$

$$+\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}}\int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} x^2dzdydx+\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\int_{\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} x^2dzdydx+\int_{\sqrt{3}}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} x^2dzdydx$$

ii.Proyectando el sólido S en el plano yz fig 71, se tiene que

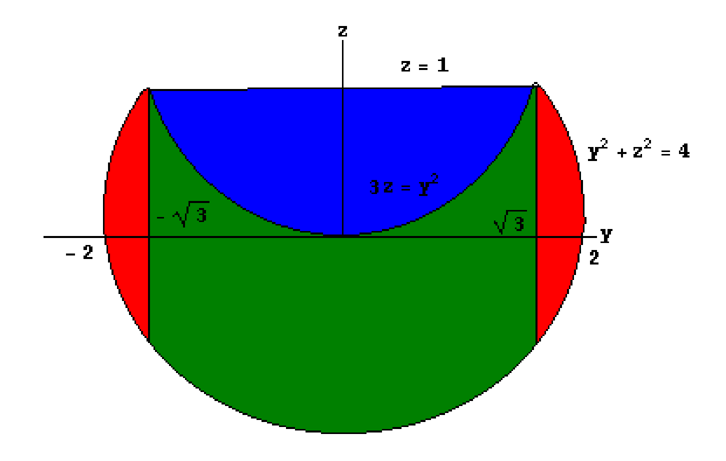


figura 71

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\int_{y^2/3}^{1}\int_{-\sqrt{4-y^2-z^2}}^{-\sqrt{3z-y^2}} x^2dxdzdy+\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\int_{y^2/3}^{1}\int_{\sqrt{3z-y^2}}^{\sqrt{4-y^2-z^2}} x^2dxdzdy+\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\int_{-\sqrt{3-y^2}}^{y^2/3}\int_{-\sqrt{4-z^2-y^2}}^{\sqrt{4-z^2-y^2}} x^2dxdzdy+$$

$$\int_{-2}^{-\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \int_{-\sqrt{4-z^2-y^2}}^{\sqrt{4-z^2-y^2}} x^2 dxdzdy + \int_{\sqrt{3}}^{2} \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \int_{-\sqrt{4-z^2-y^2}}^{\sqrt{4-z^2-y^2}} x^2 dxdzdy.$$

Ejercicio 11 *Mostrar que*

1. $\int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 dzdydx = 6$

2. $\int_0^1 \int_0^2 \int_1^3 (x+y+z)\, dxdydz = 14$

3. $\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^a dzdydx = \frac{1}{2}a\pi$

4. $\iiint_S dzdxdy = \int_{-1}^{1} \int_{z^2}^{2-z^2} \int_0^{4-z} dxdydz = \frac{32}{3}$ si S está limitado por las superficies $y = 2 - z^2$, $y = z^2$, $x + z = 4$, $x = 0$

5. $\iiint_S dzdxdy = \int_{-3}^{3} \int_{-1}^{2} \int_0^{9-x^2} dzdydx = 108$ si S está limitado por las superficies $z = 9 - x^2$, $z = 0$, $y = -1$, $y = 2$

6. $\iiint_S dzdxdy = \int_{-3}^{3} \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \int_4^{\sqrt{25-x^2-y^2}} dzdydx$ si S está limitado por las superficies $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $z \geq 4$

7. $\iiint_S dzdxdy = \int_{-2}^{2} \int_0^6 \int_0^{4-x^2} dzdydx = 64$ si S está limitado por las superficies $z = 4 - x^2$, $y = 0$, $y = 6$, $z = 0$.

8.

$$\begin{aligned} \iiint_S f(x,y,z)dzdxdy &= \int_0^1 \int_{-1}^1 \int_0^{y^2} f(x,y,z)dzdydx = \int_{-1}^1 \int_0^1 \int_0^{y^2} f(x,y,z)dzdxdy \\ &= \int_{-1}^1 \int_0^{y^2} \int_0^1 f(x,y,z)dxdzdy \end{aligned}$$

Si S está limitado por las gráficas de $z = y^2, z = 0, x = 0, x = 1, y = \pm 1$

9. Verificar que

$$\iiint\limits_S f(x,y,z)dzdxdy = \int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1}\int_{0}^{1-y} f(x,y,z)dzdydx = \int_{0}^{1}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\int_{0}^{1-y} f(x,y,z)dzdxdy =$$

$$= \int_{0}^{1}\int_{-\sqrt{1-z}}^{\sqrt{1-z}}\int_{x^2}^{1-z} f(x,y,z)dydxdz = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x^2}\int_{x^2}^{1-z} f(x,y,z)dydzdx = \int_{0}^{1}\int_{0}^{1-z}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y,z)dxdydz =$$

$$= \int_{0}^{1}\int_{0}^{1-y}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y,z)dxdzdy$$

Si S es el sólido limitado por los gráficos de $y = x^2$, $y + z = 1$, $z = 0$

10. Verificar que

$$\iiint\limits_S f(x,y,z)dzdxdy = \int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1}\int_{0}^{2} f(x,y,z)dydzdx =$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2}\int_{x^2}^{1} f(x,y,z)dzdydx = \int_{0}^{2}\int_{0}^{1}\int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} f(x,y,z)dxdzdy$$

Si S está limitado por las gráficas de $z = x^2, z = 1, y = 2, y = 0$

11. Verifique $\iiint\limits_S f(x,y,z)dzdxdy = \int_{-3}^{3}\int_{0}^{9-y^2}\int_{0}^{9-z} f(x,y,z)dxdzdy$ Si S está limitado por las gráficas de $z = 9 - y^2, x + z = 9, x = 0, z = 0$

12. Verifique

$$\iiint\limits_S f(x,y,z)dzdxdy = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-z^2}}^{\sqrt{4-z^2}}\int_{0}^{4-x^2-z^2} f(x,y,z)dydxdz = \int_{-2}^{2}\int_{0}^{4-x^2}\int_{-\sqrt{4-x^2-y}}^{\sqrt{4-x^2-y}} f(x,y,z)dzdydx$$

Si S está limitado por las gráficas de $y = 4 - x^2 - z^2, y = 0$

13. Verifique $\iiint\limits_S f(x,y,z)dzdxdy = \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\int\limits_{0}^{6-x-y} f(x,y,z)dzdxdy$ Si S está limitado por las gráficas de $z = 6 - x - y, x^2 + y^2 = 1, z = 0$

14. Verifique $\iiint\limits_S f(x,y,z)dzdxdy = \int\limits_{0}^{1}\int\limits_{x}^{1}\int\limits_{0}^{2-x} f(x,y,z)dzdydx = \int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{y}\int\limits_{0}^{2-x} f(x,y,z)dzdxdy$ Si S está limitado por las gráficas de $y = x, z = 0, y = 1, x = 0, z = 2 - x$

15. Verifique $\iiint\limits_S f(x,y,z)dzdxdy = \int\limits_{0}^{1}\int\limits_{-1}^{0}\int\limits_{0}^{y^2} f(x,y,z)dzdydx$ Si S está limitado por las gráficas de $z = y^2, y = -1, z = 0, x = 0, x = 1$

16. Mostrar que

$$\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{y}^{1}\int\limits_{0}^{y} f(x,y,z)dzdxdy = \int\limits_{0}^{1}\int\limits_{z}^{1}\int\limits_{y}^{1} f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{y}\int\limits_{y}^{1} f(x,y,z)dxdzdy =$$

$$= \int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{x}\int\limits_{z}^{x} f(x,y,z)dydzdx = \int\limits_{0}^{1}\int\limits_{z}^{1}\int\limits_{z}^{x} f(x,y,z)dydxdz$$

5.3 Matriz Jacobiana.

Sea φ un campo vectorial, $\varphi : R^n \to R^n$ con $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x),...,\varphi_n(x))$, donde $\varphi_k : R^n \to R$

se llama función componente y a

$$M\varphi = \begin{bmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

se llama matriz jacobiana ; y al

$$\det(M\varphi) = |M\varphi| = \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n)}{\partial(x_1, x_2, ..., x_n)} = J_\varphi$$

se llama el jacobiano de φ

Ejemplo 5.13

$$\varphi(u,v) = (x(u,v), y(u,v)) = (u+v, u-v) \ = \ (\varphi_1(u,v),\ \varphi_2(u,v))$$

entonces

$$M_\varphi = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 5.14 *Si*

$$\varphi(x,y,z) = (xy, xz, y) = (u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z))$$

entonces

$$M_\varphi = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & x & 0 \\ z & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Una propiedad útil del jacobiano es

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(r,s)} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \cdot \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,s)} \quad \text{y de aquí } \frac{\partial(u,v)}{\partial(u,v)} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \cdot \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 1 \quad \text{entonces}$$

$$1 = J\varphi^{-1} \cdot \ J\varphi$$

5.4 Teorema del cambio de variable

Sea φ inyectiva, con derivadas parciales continuas en $A \subseteq R^n$, $J\varphi \neq 0$, y $\varphi : R^n \to R^n$, $f : R^n \to R$

con f acotada y continua en $\varphi(A) \subseteq R^n$ entonces $f \circ \varphi$ es integrable en A y

$$\int\limits_{\varphi(A)} f = \int\limits_{A} (f \circ \varphi)\, |J_\varphi|$$

La demostración está fuera del alcance de este texto.

En dos dimensiones se tiene que :

$$\varphi : R^2 \to R^2, f : R^2 \to R \quad \text{y} \quad \int\limits_{\varphi(A)} f = \iint\limits_{\varphi(A)} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{A} f(\varphi(u,v)) \left|J_\varphi\right| dudv$$

donde $\varphi(u,v) = (x(u,v), y(u,v)) = (x,y)$ y hay que hallar $\varphi(u,v)$, A, $f \circ \varphi$, J_φ fig 72

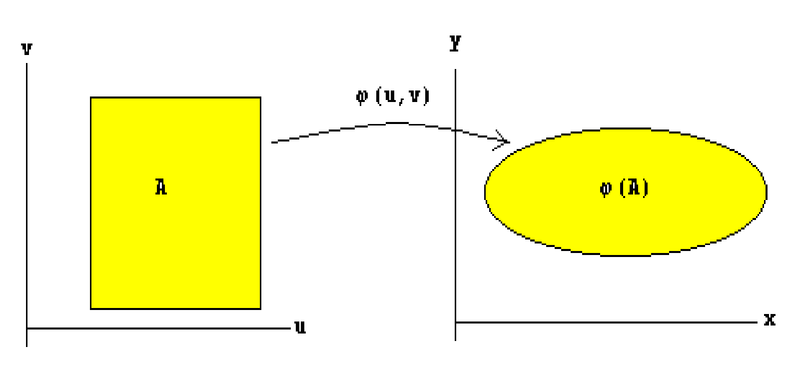


figura 72

y en tres dimensiones y

$$\varphi : R^3 \to R^3, f : R^3 \to R \quad \text{y} \quad \int\limits_{\varphi(A)} f = \iint\int\limits_{\varphi(A)} f(x,y,z)dzdxdy = \iiint\limits_{A} f(\varphi(u,v,w)) \left|J_\varphi\right| dudvdw$$

donde $\varphi(u,v,w) = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) = (x,y,z)$ y hay que hallar $\varphi(u,v,w)$, A, $f \circ \varphi$, J_φ

En general la integral $\int\limits_{\varphi(A)} f$ es dificil de resolver , pero haciendo un cambio de variable apropiado, la integral

$$\int\limits_A (f \circ \varphi) \left|J_\varphi\right|$$

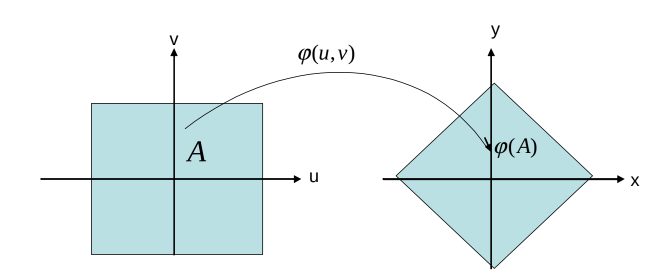
es más fácil de solucionar. No hay una forma general para hacer el cambio de variable, en algunas oportunidades depende de la region $\varphi(A)$ y en otras del integrando f. Con los ejemplos siguientes se pretende dar claridad a la aplicación de este teorema y su porqué, cómo hallar $\varphi(u,v)$, A, $f \circ \varphi$, J_φ.

5.4.1 Cambio de variable lineal

Este cambio de variable lineal (por darle un nombre) se ilustrará con los ejemplos siguientes.

Ejemplo 5.15 *Calcular la integral*

$$\iint\limits_{\varphi(A)} (x-y)^{10}(x+y)^{20}\,dxdy \quad con \quad \varphi(A) = \{(x,y)\,/\,|x|+|y| \le 9\} \quad fig73$$



Soluciòn Sea $u = x+y$, $v = x-y$ entonces $u+v = 2x$ entonces $x = \frac{u}{2} + \frac{v}{2}$ y $u-v = 2y$ entonces $y = \frac{u}{2} - \frac{v}{2}$ y así $\varphi(u,v) = (x(u,v), y(u,v)) = (x,y) = \left(\frac{u}{2} + \frac{v}{2}, \frac{u}{2} - \frac{v}{2}\right)$.

Como $u = x+y$ entonces $u = 9$ y $u = -9$ y para $v = x-y$ entonces $v = 9$ y $v = -9$ luego $A = [-9,9]\times[-9,9]$ y

$$J_\varphi = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$f(\varphi(u,v)) = f(\frac{u}{2} + \frac{v}{2}, \frac{u}{2} - \frac{v}{2}) = (\frac{u}{2} + \frac{v}{2} - (\frac{u}{2} - \frac{v}{2}))^{10}\left(\frac{u}{2} + \frac{v}{2} + \frac{u}{2} - \frac{v}{2}\right)^{20} = v^{10}u^{20}$$

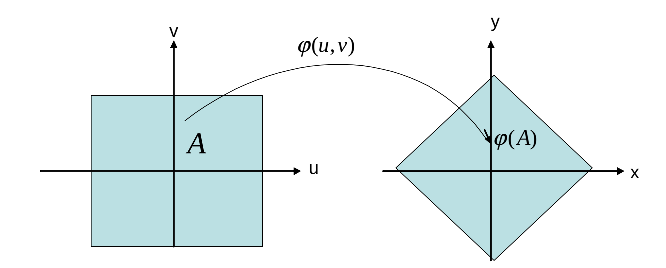
así

$$\iint\limits_{\varphi(A)} (x-y)^{10}(x+y)^{20}\,dxdy = \int_{-9}^{0}\int_{-9-x}^{9+x} (x-y)^{10}(x+y)^{20}\,dydx + \int_{0}^{9}\int_{x-9}^{9-x} (x-y)^{10}(x+y)^{20}\,dydx$$

$$= \int_{-9}^{9}\int_{-9}^{9} v^{10}u^{20}\left|-\frac{1}{2}\right| dudv = \frac{1}{2}\int_{-9}^{9}\int_{-9}^{9} v^{10}u^{20}dudv = \frac{2289\,122\,546\,861\,674\,989\,771\,899\,392\,854}{77}$$

Ejemplo 5.16 *Calcular la integral*

$$\iint\limits_{\varphi(A)} xdxdy \quad con \quad \varphi(A) = \{(x,y)\,/\,|x|+|y| \le 9\} \quad .fig74$$



Sea $u = x+y$ entonces $u = 9$ y $u = -9$ y $v = x-y$ entonces $v = 9$ y $v = -9$,como en el ejemplo anterior, luego

$$A = [-9,9] \times [-9,9] \quad J_\varphi = -\frac{1}{2} y \ f(\varphi(u,v)) = f(\frac{u}{2} + \frac{v}{2}, \frac{u}{2} - \frac{v}{2}) = \frac{u+v}{2}$$

entonces

$$\iint\limits_{\varphi(A)} xdxdy = \int_{-9}^{0}\int_{-9-x}^{9+x} xdydx + \int_{0}^{9}\int_{x-9}^{9-x} xdydx =$$

$$= \int_{-9}^{9}\int_{-9}^{9} \left(\frac{u+v}{2}\right)\left|-\frac{1}{2}\right| dudv = \frac{1}{2}\int_{-9}^{9}\int_{-9}^{9}\left(\frac{u+v}{2}\right) dudv = 0$$

Ejemplo 5.17 *Calcular la integral*

$$\iint\limits_{\varphi(A)} ydxdy$$

con $\varphi(A)$ la región limitada por el gráfico de las curvas $x + y = 9$, $x = 0$, $y = 0$ fig 75

Solución Sea $u = x + y$, $v = x - y$, luego $x = \frac{u}{2} + \frac{v}{2}$, $y = \frac{u}{2} - \frac{v}{2}$, $J_\varphi = -\frac{1}{2}$, $f(\varphi(u,v)) = f(\frac{u}{2} + \frac{v}{2}, \frac{u}{2} - \frac{v}{2}) = \frac{u-v}{2}$.

Como $u = x + y$ entonces $u = 9$. Como $u = x + y$, $v = x - y$, para $x = 0$ se tiene que $u = y$ y $v = -y$ entonces $u = -v$ y para $y = 0$, $u = x$, $v = x$,entonces $u = v$, luego A es la region limitada por $u = v$, $u = -v$ y $u = 9$, así que

$$\iint\limits_{\varphi(A)} ydxdy = \int_{0}^{9}\int_{0}^{9-x} ydydx = \frac{1}{2}\int_{0}^{9}\int_{-u}^{u}\left(\frac{u-v}{2}\right) dvdu = \frac{243}{2}.$$

Ejemplo 5.18 *Calcular la integral*

$$\iint_{\varphi(A)} (x+y)\,dxdy$$

con $\varphi(A)$ *la región limitada por el gráfico de las curvas* $x+y=10$, $x+y=4$, $x=0, y=0$ *fig 76.*

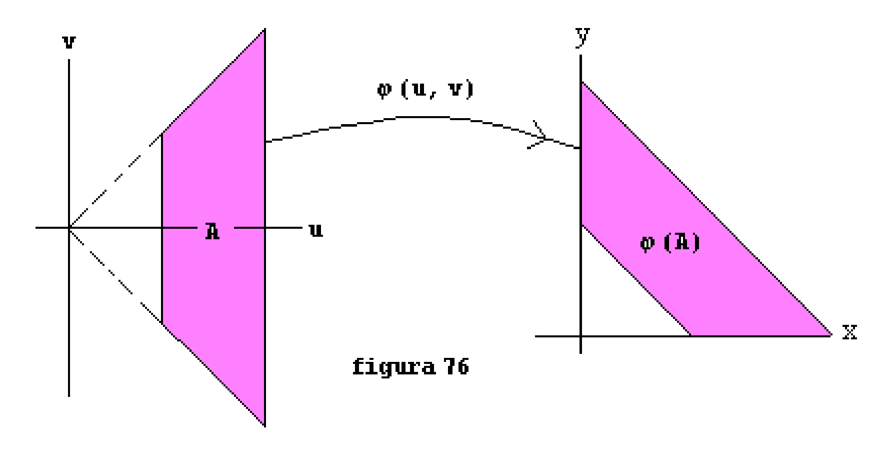


figura 76

Solución Sea $u=x+y$, $v=x-y$, luego $x=\frac{u}{2}+\frac{v}{2}$, $y=\frac{u}{2}-\frac{v}{2}$, $J_\varphi=-\frac{1}{2}$
$f(\varphi(u,v))=f(\frac{u}{2}+\frac{v}{2},\frac{u}{2}-\frac{v}{2})=\frac{u+v}{2}+\frac{u-v}{2}=u.$

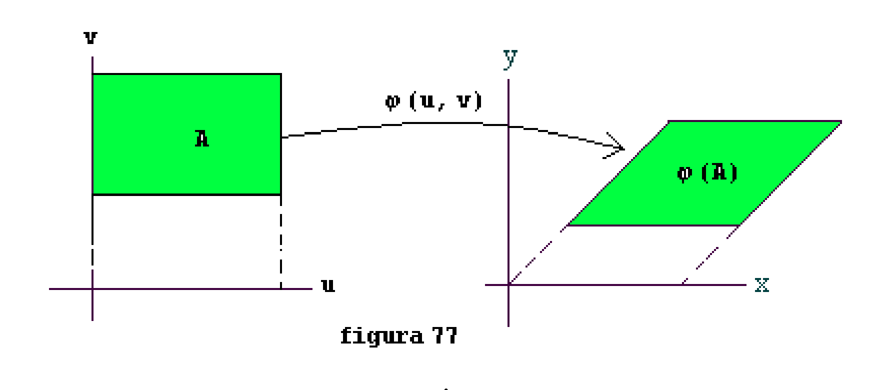
Como $u=x+y$ entonces $u=10$, $u=4$. Como $u=x+y$, $v=x-y$, para $x=0$ se tiene que $u=y$ y $v=-y$ entonces $u=-v$ y para $y=0$, $u=x$, $v=x$, entonces $u=v$, luego A es la region limitada por $u=v$, $u=-v$ y $u=10$, $u=4$, así que

$$\iint_{\varphi(A)} (x+y)\,dxdy = \int_0^4\int_{4-x}^{10-x} (x+y)\,dydx + \int_4^{10}\int_0^{10-x} (x+y)\,dydx = \frac{1}{2}\int_4^{10}\int_{-u}^{u} udvdu = 312.$$

Ejemplo 5.19 *Calcular la integral*

$$\iint_{\varphi(A)} (x-y)^3\,dxdy$$

con $\varphi(A)$ *la región limitada por el gráfico de las curvas* $x=y$, $y=x-5$, $y=4$, $y=6$, *fig 77*



.

Solución Sea $u = x - y$, $v = y$ entonces $u = 5, u = 0$, $v = 4$, $v = 6$, $f(\varphi(u,v)) = f(u+v,v) = u + v - v = u^3$

$$J_\varphi = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

y así

$$\iint\limits_{\varphi(A)} (x-y)^3\, dxdy = \int_4^6 \int_4^x (x-y)^3\, dydx + \int_6^9 \int_4^6 (x-y)^3\, dydx + \int_9^{11} \int_{x-5}^6 (x-y)^3\, dydx$$

$$= \int_0^5 \int_4^6 u^3 \cdot 1 dvdu = \frac{625}{2}$$

Ejemplo 5.20 *Calcular la integral*

$$\iint\limits_{\varphi(A)} dxdy \quad con\ \varphi(A)$$

la región limitada por el gráfico de las curvas $x = y$, $y = 5x$, $xy = 2$, $xy = 4$ *en el primer cuadrante fig 78*

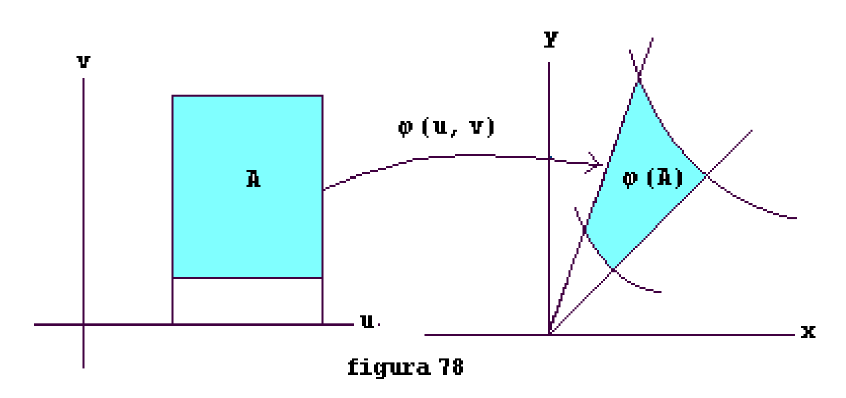


figura 78

Solución Sea $u = xy$, $v = \dfrac{y}{x}$, entonces $y = vx$, luego $u = x(vx) = x^2 v$, es decir, $x = \sqrt{\dfrac{u}{v.}}$ Como $y = vx = v.\sqrt{\dfrac{u}{v.}} = \sqrt{u}.\sqrt{v}.$

$$J_\varphi = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2\sqrt{u}.\sqrt{v}} & \frac{1}{2}v^{-3/2}u^{1/2} \\ \dfrac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \dfrac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \end{vmatrix} = \frac{1}{4v} + \frac{1}{4v} = \frac{1}{2v}.$$

$$J_{\varphi^{-1}} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ \dfrac{-y}{x^2} & \dfrac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{y}{x} + \frac{y}{x} = \frac{2y}{x} = 2v$$

$$f(\varphi(u,v)) = f(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{u}.\sqrt{v}) = 1$$

Como $u = xy$ entonces $u = 2$, $u = 4$ y $v = \dfrac{y}{x}$ se tiene que $v = 1$, $v = 5$ y asì

$$\iint\limits_{\varphi(A)} dxdy = \int_2^4 \int_1^5 \frac{1}{2v} dvdu = \ln 5$$

Ejercicio 12 *Mostrar que*

1. $\iint\limits_{\varphi(A)} xydxdy = \int_2^4 \int_2^6 \frac{u}{2v} dvdu = 3(ln6 - ln2)$ *si* Q limitada por $xy = 2$, $xy = 4$, $xy^3 = 2$, $xy^3 = 6$, primer cuadrante.

2. $\iint\limits_{\varphi(A)} (x+y)^{40}\, dxdy = \int\limits_1^4 \int\limits_{-u}^{u} \dfrac{u^{40}}{2} dvdu$ si Q es la región limitada por los gráficos de las curvas $x+y=1$, $x+y=4$, $x=0$, $y=0$.

3. $\iint\limits_{\varphi(A)} (x-y)\, sen\,(x+y)\, dxdy = \int\limits_{\pi}^{3\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \dfrac{v \sin u}{2} dvdu = 0$ si Q es la región limitada por los gráficos de las curvas $x+y=3\pi$, $x+y=\pi$, $x-y=\pi$, $x-y=-\pi$

4. $\iint\limits_{\varphi(A)} (\sqrt{x-2y}+\frac{y^2}{4})dxdy = \int\limits_0^4 \int\limits_0^{\frac{4-u}{4}} 2\,(\sqrt{u}+v^2)\, dvdu = \frac{74}{15}$ si Q es el triángulo de vèrtices $(0,0),(4,0)\ (4,2)\quad (u=x-2y, v=y/2)$

5. $\int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-x} e^{\frac{y}{x+y}} dydx = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{u} e^{\frac{v}{u}} dvdu$

6. $\int\limits_0^1 \int\limits_0^{2-2y} e^{\frac{x-2y}{x+2y}} dxdy. = \int\limits_0^2 \int\limits_{-u}^{u} \frac{e^{\frac{v}{u}}}{4} dvdu$

7. $\iint\limits_{Q} dxdy\ = \int\limits_1^3 \int\limits_2^5 \frac{1}{3} dvdu = 2$ si Q es la región limitada por los gráficos de las curvas $y=2x+3$, $y=2x+1$, $y=5-x$, $y=2-x$

8. $\iint\limits_{Q} (y-x)\, dxdy = \int\limits_2^4 \int\limits_0^5 v\frac{1}{2} dvdu = \frac{25}{2}$ si Q es la región limitada por los gráficos de las curvas $y=x+5$, $y=x$, $y=4-x$, $y=2-x$

9. $\iint\limits_{Q} (y-2x)\, dxdy = \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_1^3 \frac{u}{2} dvdu = 0$ si Q es la región limitada por los gráficos de las curvas $y=2x-1$, $y=2x+1$, $y=3$, $y=1$

10. $\iint\limits_{Q} \left(\sqrt{\dfrac{y}{x}}+\sqrt{xy}\right) dxdy = \int\limits_1^9 \int\limits_1^4 \frac{1}{2v}\,(\sqrt{v}+\sqrt{u})\, dvdu = \frac{26}{3}\ln 4 + 8$ si Q es la región limitada por los gráficos de las curvas $xy=1$, $xy=9$, $y=x$, $y=4x$ primer cuadrante

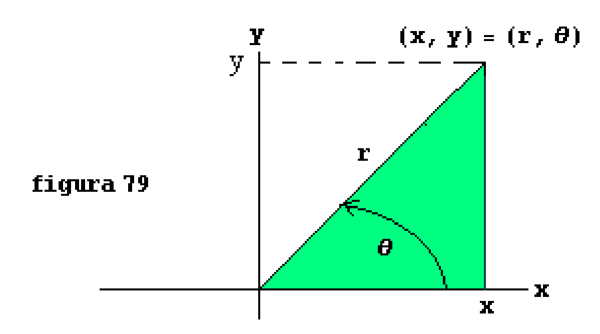
11. $\iint\limits_{Q} dxdy\ = \int\limits_1^2 \int\limits_{-u}^{u} \frac{1}{2} dvdu = \frac{3}{2}$ si Q es la región limitada por los gráficos de las curvas $x-y=1, x-y=2, y=0, x=0$

12. $\iint\limits_{Q} xdxdy\ = \int\limits_1^2 \int\limits_{-u}^{u} (u+v)\frac{1}{4} dvdu = \frac{7}{6}$ si Q es el trapecio de vértices$(1,0),(2,0),(0,-2),(0,-1)$

13. $\iint\limits_Q y dxdy = \int\limits_0^2 \int\limits_{-1}^0 \frac{u+v}{9} dvdu = \frac{1}{9}$ si Q es la región limitada por los gráficos de las curvas $y = x$, $y = x - 1$, $x + 2y = 0, x + 2y = 2$

5.4.2 Coordenadas Polares.

Recordemos algunos aspectos fundamentales fig 79.



De la fig 79 $\cos\theta = \dfrac{x}{r}$, $\sin\theta = \dfrac{y}{r}$ entonces $x = r\,\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ y $x^2 + y^2 = r^2 (\cos^2\theta + \sin^2\,\theta) = r^2$ luego $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\dfrac{y}{x} = \dfrac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \tan\theta$, $\varphi(r,\theta) = (x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ y

$$J_\varphi = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ sen\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

Pasar un punto de coordenadas polares a cartesianas y viceversa.

Para pasar puntos de coordenadas polares a coordenadas cartesianas se utiliza $x = r\,\cos\theta$, y $y = r\sin\theta$.

1. Pasar el punto $\left(1, \dfrac{\pi}{4}\right) = (r, \theta)$ a coordenadas cartesianas.

$x = r\,\cos\theta = 1.\cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $y = r\sin\theta = 1.\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ y así el punto en coordenadas polares $\left(1, \dfrac{\pi}{4}\right)$ corresponde en coordenadas cartesianas al punto $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

2.Pasar el punto $\left(1, \dfrac{3\pi}{4}\right) = (r, \theta)$ a coordenadas cartesianas.

$x = r\cos\theta = 1.\cos\dfrac{3\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $y = r\sin\theta = 1.\sin\dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ y así el punto en coordenadas polares $\left(1, \dfrac{3\pi}{4}\right)$ corresponde en coordenadas cartesianas al punto $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

3. Pasar el punto $\left(1, \dfrac{5\pi}{4}\right) = (r, \theta)$ a coordenadas cartesianas.

$x = r\cos\theta = 1.\cos\dfrac{5\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $y = r\sin\theta = 1.\sin\dfrac{5\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ y así el punto en coordenadas polares $\left(1, \frac{3\pi}{4}\right)$ corresponde en coordenadas cartesianas al punto $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Pasar un punto de coordenadas cartesianas a polares.

1. Pasar el punto

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

de coordenadas cartesianas a coordenadas polares. En efecto

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1, \tan\theta = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1$$

entonces $\theta = 2\pi - \dfrac{\pi}{4} = 7\pi/4$ asì el punto en coordenadas cartesianas $(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2})$, corresponde en coordenadas polares al punto $(1, 7\pi/4)$.

2. Pasar el punto

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

en coordenadas cartesianas a coordenadas polares. En efecto

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1, \tan\theta = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1$$

entonces $\theta = \pi - \dfrac{\pi}{4} = 3\pi/4$,así el punto en coordenadas cartesianas $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, corresponde en coordenadas polares al punto $(1, 3\pi/4)$.

3. Pasar el punto

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

de coordenadas cartesianas a coordenadas polares. En efecto

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=1,\tan\theta=\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}=1$$

entonces $\theta=\pi+\dfrac{\pi}{4}=5\pi/4$, así el punto en coordenadas cartesianas $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, corresponde en coordenadas polares al punto $(1,5\pi/4)$.

1.Pasar la ecuación $x^2+y^2=4$ a coordenadas polares. En efecto $x^2+y^2=(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2=r^2=4$ entonces $r=2$.

2.Pasar la ecuación $x+y=6$ a coordenadas polares. En efecto $x+y=r\cos\ \theta+r\sin\theta=r(\cos\theta+\sin\theta)=6$ entonces $r=\dfrac{6}{\cos\theta+\sin\theta}$. Si $r=\dfrac{6}{\cos\theta+\sin\theta}$ entonces $6=rcos\theta+r\sin\theta=x+y$.

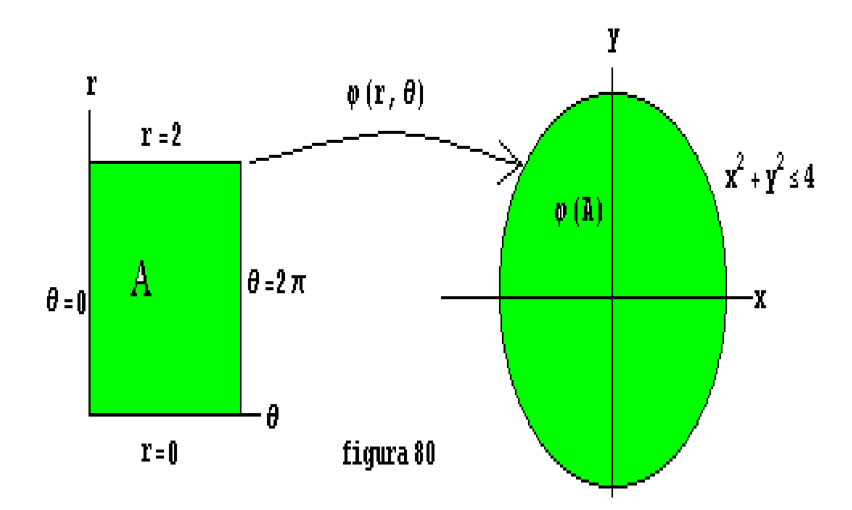
3.Pasar la ecuación $x^2+y^2=4x$ a coordenadas polares. En efecto $x^2+y^2=(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2=r^2=4r\cos\theta$, entonces $r=4\cos\theta$.

Si $r=4\cos\theta$, $r^2=4r\cos\theta$ entonces $x^2+y^2=4x$.

4 .Pasar la ecuación $(x^2+y^2)^2=\ x^2-y^2$ a coordenadas polares. En efecto $(x^2+y^2)^2=r^4=r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta$ entonces $r^2=\cos 2\theta$. Si $r^2=\cos 2\theta$ entonces $r^4=r^2\cos 2\theta=r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta$ luego $(x^2+y^2)^2=\ x^2-y^2$.

Ejemplo 5.21 *Calcular la integral*

$$\iint\limits_{\varphi(A)} e^{x^2+y^2}dxdy\ ;\quad \varphi(A)=\{(x,y)/\ x^2+y^2\leq 4\}\quad \textit{fig80}$$



Solución. $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $\varphi(r,\theta) = (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ $0 \le r \le 2$, $0 \le \theta \le 2\pi$

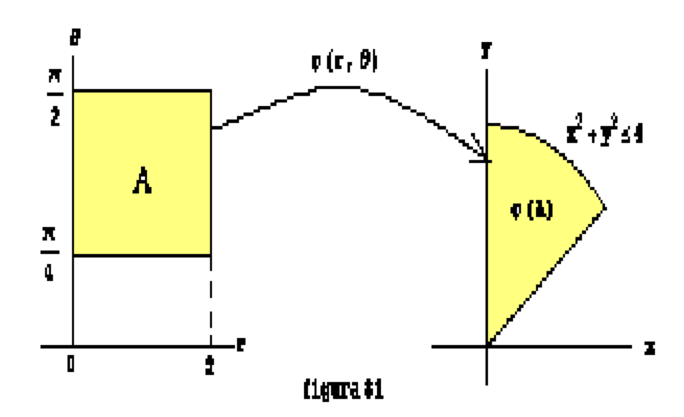
$$J_\varphi = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

$$\iint\limits_{\varphi(A)} e^{x^2+y^2} dxdy = \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} e^{x^2+y^2}\ dydx = \int_0^{2\pi}\int_0^2 e^{r^2}\ rdrd\theta = \pi e^4 - \pi.$$

Ejemplo 5.22 *Calcular la integral*

$$\iint\limits_{\varphi(A)} xdxdy$$

$\varphi(A)$ *es la región limitada por los gráficos de las curvas* $y = x$, $x = 0$, $x^2 + y^2 = 4$ *primer cuadrante fig 81*



Solución. Como $y = x$ entonces $x^2 + x^2 = 4$, luego $2x^2 = 4$ y así $x = \pm\sqrt{2} = y$
$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $\varphi(r,\theta) = (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ $0 \le r \le 2$, $\pi/4 \le \theta \le \pi/2$

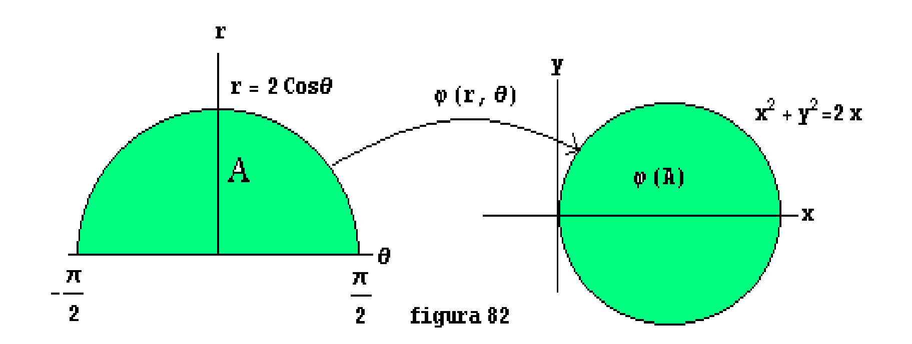
$$J_\varphi = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

$$\iint\limits_{\varphi(A)} x dx dy = \int_0^{\sqrt{2}} \int_x^{\sqrt{4-x^2}} x \; dy dx = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^2 (r\cos\theta)\, r dr d\theta = \frac{8}{3} - \frac{4}{3}\sqrt{2}$$

Ejemplo 5.23 *Calcular la integral*

$$\iint\limits_{\varphi(A)} \left(x^2 + y^2\right)^2 dx dy$$

$\varphi(A)$ *es la región limitada por la gráfica de la curva* $(x^2 + y^2) = 2x$ *fig 82*



Solución $(x^2+y^2)=2x$ equivale a $r=2\cos\theta$ $-\pi/2\leq\theta\leq\pi/2$ y así

$$\iint\limits_{\varphi(A)}\left(x^2+y^2\right)^2dxdy=\int\limits_0^2\int\limits_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}}\left(x^2+y^2\right)^2dydx=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\int\limits_0^{2\cos\theta}\left(r^2\right)^2rdrd\theta=\frac{10}{3}\pi$$

Ejemplo 5.24 *Calcular la integral*

$$\iint\limits_{\varphi(A)}ydxdy$$

$\varphi(A)$ *es la región limitada por la gráfica de la curva* $(x^2+y^2)=2y, x^2+(y-1)^2=1$ *fig 83*

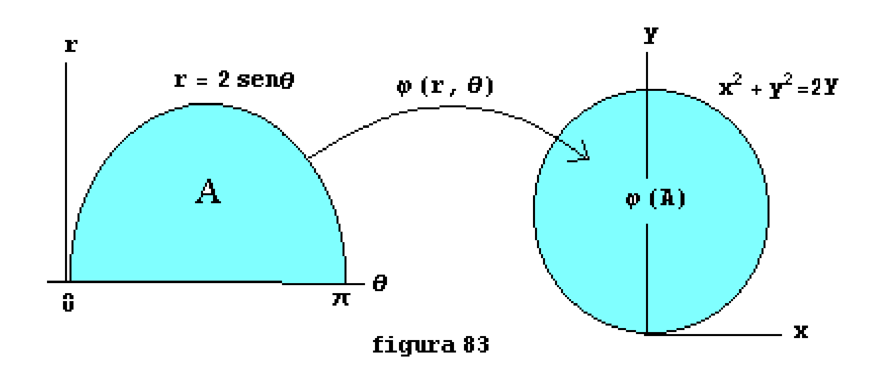


figura 83

Solución .

$$\iint\limits_{\varphi(A)}ydxdy=\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}}ydydx=\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\sin\theta}(r\sin\theta)\,rdrd\theta=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{1}(1+r\sin\theta)\,rdrd\theta=\pi$$

Ejemplo 5.25 *Calcular la integral*

$$\iint\limits_{\varphi(A)}dxdy$$

$\varphi(A)$ *es la región limitada por la gráfica de la curva* $\left(x^2+y^2\right)^2=x^2-y^2$ *fig 84*

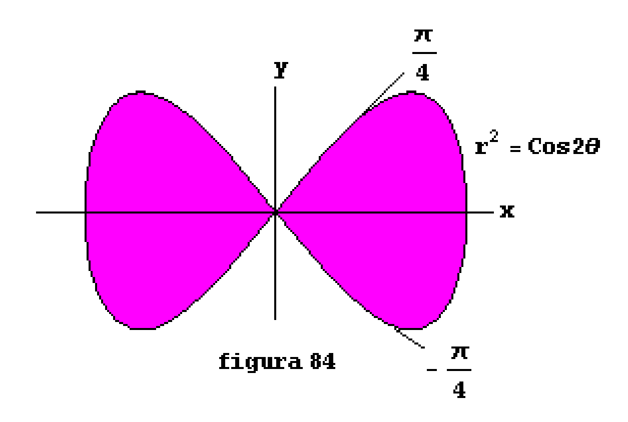


figura 84

La ecuación

$$\left(x^2+y^2\right)^2 = x^2-y^2$$

en polares es

$$r^4 = r^2\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)$$

es decir, $r^2=\cos 2\theta$ que es positiva para $-\pi/4\le\theta\le\pi/4$, $3\pi/4\le\theta\le 5\pi/4$, luego

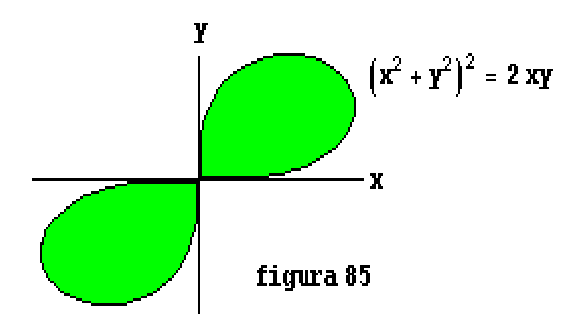
$$\iint\limits_{\varphi(A)} dxdy = \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} rdrd\theta + \int_{3\pi/4}^{5\pi/4}\int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} rdrd\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/4}\int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} rdrd\theta + \int_{3\pi/4}^{5\pi/4}\int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} rdrd\theta + \int_{7\pi/4}^{2\pi}\int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} rdrd\theta = 1.$$

Ejemplo 5.26 *Calcular la integral*

$$\iint\limits_{\varphi(A)} ydxdy$$

donde $\varphi(A)$ *es la región limitada por la gráfica de la curva* $\left(x^2+y^2\right)^2=2xy$ *fig 85*



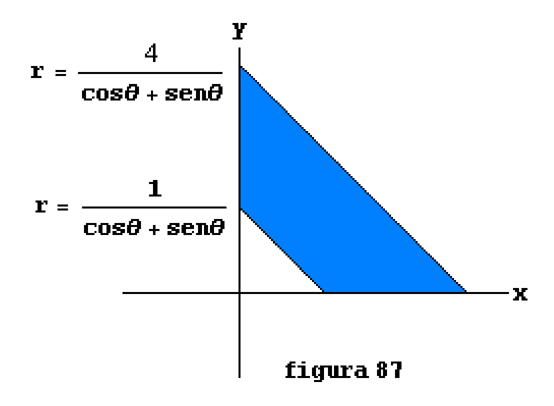
Solución.La ecuación de la curva en polares es $r^2 = \sin 2\theta$ y alcanza el máximo valor cuando $2\theta = \pi/2$, es decir, cuando $\theta = \pi/4$ fig 85

$$\iint_{\varphi(A)} ydxdy = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\sqrt{\sin 2\theta}} (r\sin\theta)\, rdrd\theta \quad + \int_{\pi}^{3\pi/2}\int_0^{\sqrt{\sin 2\theta}} (r\sin\theta)\, rdrd\theta.$$

Ejemplo 5.27 *Calcular la integral*

$$\iint_{\varphi(A)} xdxdy$$

donde $\varphi(A)$ es la región limitada por la gráfica de las curvas $x+y=4$, $x+y=1$, $x=0$, $y=0$, fig 87



Solución. Las ecuciones de las curvas $x+y=4$, $x+y=1$ en coordenadas polares son
$r=\dfrac{4}{\cos\theta+\sin\theta}$, $r=\dfrac{1}{\cos\theta+\sin\theta}$, luego

$$\iint\limits_{\varphi(A)} xdxdy=\int\limits_{0}^{\pi/2}\int\limits_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{\frac{4}{\cos\theta+\sin\theta}}(r\cos\theta)\,rdrd\theta.$$

Ejemplo 5.28 *Calcular la integral*

$$\iint\limits_{\varphi(A)} xdxdy$$

donde $\varphi(A)$ *es el cuadrado de lado* 1 *fig 88*

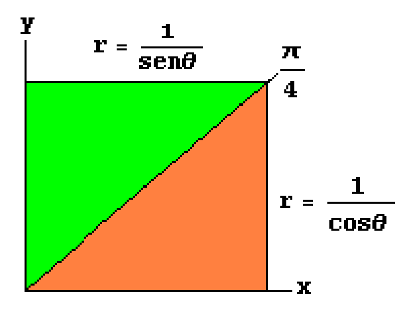


figura 88

Solución. Si $y=1$ entonces $r\sin\theta=1$, luego $r=\dfrac{1}{\sin\theta}$ y $x=1$,equivale a $r=\dfrac{1}{\cos\theta}$ luego

$$\iint\limits_{\varphi(A)} xdxdy=\int\limits_{0}^{\pi/4}\int\limits_{0}^{\frac{1}{\cos\theta}}(r\cos\theta)\,rdrd\theta\;+\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\int\limits_{0}^{\frac{1}{\sin\theta}}(r\cos\theta)\,rdrd\theta$$

Ejemplo 5.29 *Calcular la integral*

$$\iint\limits_{\varphi(A)} dxdy$$

donde $\varphi(A)$ *es la región limitada por los gráficos de* $y=x^2$ *y* $y=1$ *fig 89*

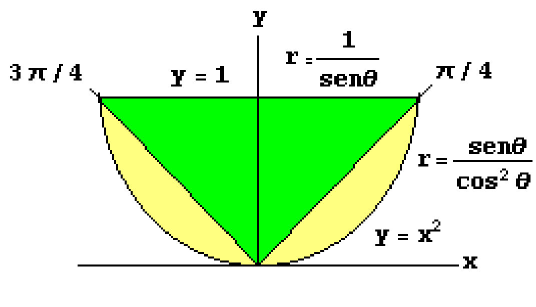


figura 89

Solución. $y = 1$ equivale en coordenadas polares a $r = \dfrac{1}{\sin\theta}$ y $y = x^2$ a $r = \dfrac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$, $\tan\theta = \dfrac{1}{1}$, luego $\theta = \pi/4$.

$$\iint\limits_{\varphi(A)} dxdy = \int_0^{\pi/4}\int_0^{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}} rdrd\theta + \int_{\pi/4}^{3\pi/4}\int_0^{\frac{1}{\sin\theta}} rdrd\theta + \int_{3\pi/4}^{\pi}\int_0^{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}} rdrd\theta$$

Ejemplo 5.30 *Calcular la integral*

$$\iint\limits_{\varphi(A)} \left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right) dxdy \ , \quad \varphi(A) = \{(x,y) \,/ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9} \le 1\}$$

Solución. $x/2 = r\cos\theta$, $y/3 = r\sin\theta$, luego $\varphi(r,\theta) = (x,y) = (2r\cos\theta, 3r\sin\theta)$ $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$

$$J_\varphi = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\cos\theta & -2r\sin\theta \\ 3sen\theta & 3r\cos\theta \end{vmatrix} = 6r$$

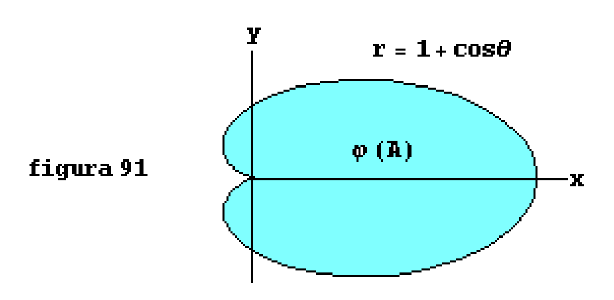
entonces

$$\iint\limits_{\varphi(A)} \left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right) dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 6r^3 drd\theta = 3\pi$$

Ejemplo 5.31 *Calcular la integral*

$$\iint\limits_{\varphi(A)} ydxdy$$

donde $\varphi(A)$ es la región limitada por el gráfico $r = 1+\cos\theta$ fig 91



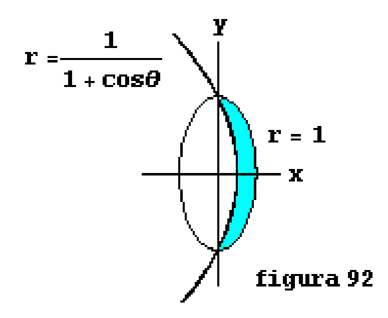
Solución

$$\iint\limits_{\varphi(A)} y dx dy = \int\limits_{0}^{2\pi} \int\limits_{0}^{1+\cos\theta} (r \sin\theta)\, r dr d\theta = 0$$

Ejemplo 5.32 *Calcular la integral*

$$\iint\limits_{\varphi(A)} dx dy$$

donde $\varphi(A)$ *es la región limitada por el gráfico interior a* $r = 1$ *y exterior a* $r = \dfrac{1}{1+\cos\theta}$ *fig 92*



Solución.

$$\iint\limits_{\varphi(A)} dx dy = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \int\limits_{\frac{1}{1+\cos\theta}}^{1} r dr d\theta = -\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\pi$$

Ejercicio 13 *Verificar la veracidad de las siguientes igualdades*

1. $\iint\limits_{\varphi(A)} \sqrt{x^2+y^2}dxdy = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_{\frac{1}{1+\cos\theta}}^{1} r.rdrd\theta$ si $\varphi(A)$ la región limitada por los gráficos de $x^2+y^2=1$, $x \geq 0$, $y^2 = 1-2x$

2. $\iint\limits_{\varphi(A)} \sqrt{x^2+y^2}dxdy = \int\limits_{0}^{2\pi} \int\limits_{2}^{5} r^2 drd\theta = 78\pi$ si $\varphi(A) = \{(x,y)\,/ 4 \leq x^2+y^2 \leq 25\}$

3. $\iint\limits_{\varphi(A)} \sqrt{x^2+y^2}dxdy = \int\limits_{0}^{\pi} \int\limits_{2}^{5} r^2 drd\theta = 39\pi$ si $\varphi(A) = \{(x,y)\,/ 4 \leq x^2+y^2 \leq 25, y \geq 0\}$

4. $\iint\limits_{\varphi(A)} (6-x-y)\, dxdy = \int\limits_{0}^{\pi} \int\limits_{0}^{2\sin\theta} (6-r\cos\theta-r\sin\theta)rdrd\theta$ si $\varphi(A)$ limitado por $x^2+y^2 = 2y$

5. $\iint\limits_{\varphi(A)} (6-x-y)\, dxdy = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} \int\limits_{0}^{2} (6-r\cos\theta-r\sin\theta)rdrd\theta + \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_{0}^{4\cos\theta} (6-r\cos\theta-r\sin\theta)rdrd\theta$ si $\varphi(A)$ limitado por $x^2+y^2=4x$, y $x^2+y^2=4$ primer cuadrante común

6. $\int\limits_{0}^{1} \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} e^{x^2+y^2} dydx = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_{0}^{1} e^{r^2} rdrd\theta$

7. $\int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} e^{x^2+y^2} dydx = \int\limits_{0}^{\pi} \int\limits_{0}^{1} e^{r^2} rdrd\theta$

8. $\int\limits_{0}^{1} \int\limits_{0}^{\sqrt{1-y^2}} e^{x^2+y^2} dxdy = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_{0}^{1} e^{r^2} rdrd\theta$

9. $\int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} e^{x^2+y^2} dxdy = \int\limits_{0}^{2\pi} \int\limits_{0}^{1} e^{r^2} rdrd\theta$

10. $\int\limits_{-a}^{a} \int\limits_{0}^{\sqrt{a^2-y^2}} \ln(x^2+y^2+1)\, dxdy = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_{0}^{a} \ln(r^2+1) rdrd\theta$

11. $\int\limits_{0}^{2} \int\limits_{0}^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{(x^2+y^2)}dydx = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_{0}^{2\cos\theta} r^2 drd\theta$

12. $\int\limits_0^1 \int\limits_y^{\sqrt{2-y^2}} \sqrt{(x^2+y^2)}dxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \int\limits_0^{\sqrt{2}} r^2 drd\theta$

13. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\infty} e^{-r^2} rdrd\theta$

14. $\iint\limits_{\varphi(A)} \sqrt{x^2+y^2}dxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{\frac{4}{\cos\theta+\sin\theta}} r.rdrd\theta + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int\limits_0^{\frac{4}{-\cos\theta+\sin\theta}} r.rdrd\theta + \int\limits_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \int\limits_0^{\frac{-4}{\cos\theta+\sin\theta}} r.rdrd\theta + \int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \int\limits_0^{\frac{4}{\cos\theta-\sin\theta}} r.rdrd\theta$s

$\varphi(A) = \{(x,y) \,/\, |x|+|y| \leq 4\}$

15. $\iint\limits_{\varphi(A)} \sqrt{x^2+y^2}dxdy = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{1-sin\theta} r.rdrd\theta$ si $\varphi(A)$ limitado por $r = 1 - sin\theta$

16. $\iint\limits_{\varphi(A)} \sqrt{x^2+y^2}dxdy = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{\cos\theta} r.rdrd\theta$ si $\varphi(A)$ limitado por $r = \cos\theta$

17. $\int\limits_0^2 \int\limits_{-5\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}^{5\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} dydx = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^1 10rdrd\theta$

18. $\int\limits_0^2 \int\limits_{-5\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}^{0} dydx = \int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \int\limits_0^1 10rdrd\theta$

19. $\int\limits_0^2 \int\limits_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} dydx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{2\cos\theta} rdrd\theta$

20. $\iint\limits_{\varphi(A)} dxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \int\limits_0^{\frac{2}{\cos\theta}} rdrd\theta$ si $\varphi(A)$ es el triángulode vertices $(0,0),(2,0),(2,2)$

21. $\iint\limits_{\varphi(A)} dxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \int\limits_0^{\frac{2}{\cos\theta}} rdrd\theta + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int\limits_0^{\frac{2}{\sin\theta}} rdrd\theta + \int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \int\limits_0^{\frac{-2}{\cos\theta}} r.rdrd\theta + \int\limits_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \int\limits_0^{\frac{-2}{\sin\theta}} rdrd\theta + \int\limits_{\frac{7\pi}{4}}^{2\pi} \int\limits_0^{\frac{2}{\cos\theta}} rdrd\theta$

si $\varphi(A)$ es el cuadradode vertices $(2,2),(-2,2),(-2,-2),(2,-2)$

5.4.3 Coordenadas cilíndricas.

Las coordenadas cilíndricas son una generalizaciòn de las coordenadas polares $\cos\theta = \dfrac{x}{r}$, $\sin\theta = \dfrac{y}{r}$ entonces $x = r\ \cos\theta,\ \ y = r\sin\theta,\ z = z.\ \varphi(r,\theta,z) = (x,y,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta\ , z)$ y

$$J_\varphi = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

Para pasar de coordenadas cilindricas a coordenadas cartesianas se utiliza $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta, z = z$ y para pasar de coordenadas cartesianas a coordenadas cilindricas se utiliza $r = \sqrt{x^2+y^2}\ z = z,\ \ \tan\theta = \dfrac{y}{x}$ con mucho cuidado

Ejemplo 5.33 *Pasar el punto* $(3, \pi/2, 5)$ *en coordenadas cilindricas a coordenadas cartesianas.*

$x = r\cos\theta$ $=3\ \cos\pi/2 = 0$, $y = r\sin\theta = 3\sin\pi/2 = 3,\ z = 5$ asì el punto es $(0,3,5)$

Ejemplo 5.34 *Pasar el punto* $(7, 2\pi/3, -4)$ *en coordenadas cilindricas a coordenadas cartesianas.*

$x = r\ \cos\theta = 7\cos 2\pi/3 = -7\cdot\frac{1}{2} = -7/2$, $y = r\sin\theta = 7\sin 2\pi/3 = 7\sqrt{3}/2,\ z = -4$ asíel punto es $\left(-\frac{7}{2}, \frac{7\sqrt{3}}{2}, -4\right)$.

Ejemplo 5.35 *Pasar el punto* $(1,1,1)$ *en coordenadas cilindricas a coordenadas cartesianas.*

$x = r\ \cos\theta$ $=1\ \cos 1$,$y = r\sin\theta = 1\sin 1, z = 1$ así el punto es $(\cos 1, \sin 1, 1)$.

Ejemplo 5.36 *Pasar el punto* $\left(\sqrt{2}, 5\pi/4, 2\right)$ *en coordenadas cilindricas a coordenadas cartesianas.*

$x = r\ \cos\theta = \sqrt{2}\ \cos 5\pi/4 = \sqrt{2}\ \cdot\frac{-\sqrt{2}}{2} = -1,\ y = r\sin\theta = \sqrt{2}\sin 5\pi/4 = \sqrt{2}\ \cdot\frac{-\sqrt{2}}{2} = -1,\ z = 2$ así el punto es $(-1,-1,2)$.

Ejemplo 5.37 *Pasar el punto (-1,0,1) en coordenadas cartesianas a coordenadas cilindricas.*

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (0)^2} = 1$, $\tan\theta = \dfrac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0$, entonces $\theta = \pi$ así el punto es $(1, \pi, 1)$

Ejemplo 5.38 *Pasar el punto* $(1, -1, 3)$ *en coordenadas cartesianas a coordenadas cilindricas.*

r $=\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$, $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-1}{1} = -1$, entonces $\theta = -\pi/4$ o $2\pi - \pi/4 = 7\pi/4$ así el punto es $\left(\sqrt{2}, 7\pi/4, 3\right)$.

Ejemplo 5.39 *Pasar el punto* $(1, 0, 0)$ *en coordenadas cartesianas a coordenadas cilíndricas.*

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1)^2 + (0)^2} = 1$, $\tan\theta = \dfrac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$, entonces $\theta = 0$ así el punto es $(1, 0, 0)$.

Ejemplo 5.40 *Pasar el punto* $(-1, 0, 0)$ *en coordenadas cartesianas a coordenadas cilíndricas.*

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (0)^2} = 1$, $\tan\theta = \dfrac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0$, entonces $\theta = \pi$ así el punto es $(1, \pi, 0)$.

Ejemplo 5.41 *Pasar el punto* $(0, -3, -3)$ *en coordenadas cartesianas a coordenadas cilíndricas.*

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(0)^2 + (-3)^2} = 3$, $\sin\theta = \dfrac{y}{r} = \frac{-3}{3} = -1$, entonces $\theta = 3\pi/2$ así el punto es $(3, 3\pi/2, -3)$.

Ejemplo 5.42 *Pasar el punto* $(-1, 1, 2)$ *en coordenadas cartesianas a coordenadas cilíndricas.*

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$, $\tan\theta = \dfrac{y}{x} = \frac{1}{-1} = -1$, entonces $\theta = 3\pi/4$ así el punto es $\left(\sqrt{2}, 3\pi/4, 2\right)$.

Ejemplo 5.43 *Pasar el punto* $(-1, -1, 4)$ *en coordenadas cartesianas a coordenadas cilíndricas.*

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$, $\tan\theta = \dfrac{y}{x} = \frac{-1}{-1} = 1$, entonces $\theta = \pi/4$ $+\pi = 5\pi/4$ así el punto es $\left(\sqrt{2}, 5\pi/4, 4\right)$

Ejemplo 5.44 *La ecuación* $z = x^2 + y^2$ *en coordenadas cilíndricas es* $z = r^2$, *pues ,* $z = x^2 + y^2 = (r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 = r^2$

Ejemplo 5.45 *La ecuación* $x+y+z = 0$ *en coordenadas cilindricas es* $r\cos\theta + r\sin\theta + z = 0$

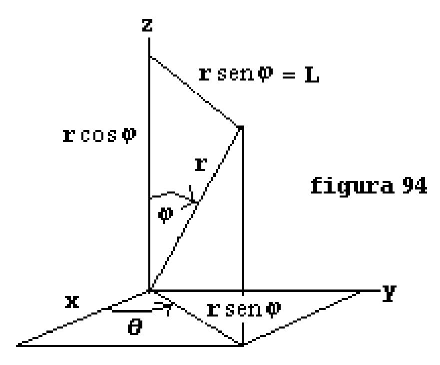
Ejemplo 5.46 *La ecuaciòn* $x^2 + y^2 = 6y$ *en coordenadas cilíndricas es* $r = 6\sin\theta$ *, pues* $x^2 + y^2 = r^2 = 6r\sin\theta = 6y$ *y así* $r = 6\sin\theta$

Ejemplo 5.47 *La ecuacón* $r = 6\cos\theta$ *en coordenadas cartesianas es* $x^2 + y^2 = 6x$, *pues si* $r = 6\cos\theta$ *entonces multiplicando por* r *ambos lados de la ecuación se tiene* $r^2 = 6r\cos\theta$ *, es decir ,* $x^2 + y^2 = 6x$

Ejemplo 5.48 *La ecuación* $r = 4$ *en coordenadas cartesianas es* $x^2 + y^2 = 16$, *pues si* $r = 4$ *entonces multiplicando por* r *ambos lados de la ecuación se tiene* $r^2 = 16$ *, es decir ,* $x^2 + y^2 = 16$

Ejemplo 5.49 *La ecuación* $r^2 + z^2 = 16$ *en coordenadas cartesianas es* $x^2 + y^2 + z^2 = 16$

5.4.4 Coordenadas esféricas



De la fig 94 se deduce que : $\cos\varphi = \dfrac{z}{r}$ entonces $z = rcos\varphi$, $\sin\varphi = \dfrac{L}{r} =$ entonces

$$L = r\sin\varphi,$$

$\cos\theta = \dfrac{x}{L}$ entonces $x = rcos\theta\sin\varphi$, $\sin\theta = \dfrac{y}{L}$ entonces $y = L\sin\theta = r\sin\varphi\sin\theta$, luego

$\sin\theta = \dfrac{y}{L}$ entonces $y = L\sin\theta = r\sin\varphi\sin\theta$ entonces

$\psi(r,\theta,\varphi) = (r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi)$ y $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$, $\cos\varphi = \dfrac{z}{r}$

$$J\psi = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\varphi & 0 & -r\sin\varphi \end{vmatrix} = -r^2 sin\varphi.$$

Ejemplo 5.50 *Pasar el punto* $(1,0,0)$ *en coordenadas cartesianas a coordenadas esféricas*

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{(1)^2+(0)^2+(0)^2} = 1,\ \tan\theta = \frac{y}{x}\ \ luego \theta = 0, \cos\varphi = \frac{z}{r} = \frac{0}{1} = 0$$

$$entonces\ \varphi = \pi/2 \ \ así\ el\ punto\ en\ coordenadas\ esféricas\ es\ (1,0,\pi/2).$$

Ejemplo 5.51 *Pasar el punto* $(0,0,1)$ *en coordenadas cartesianas a coordenadas esféricas*

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{(0)^2+(0)^2+(1)^2} = 1, \tan\theta = \frac{y}{x}\ \ luego \theta = 0, \cos\varphi = \frac{z}{r} = \frac{1}{1} = 1$$

entonces $\varphi = 0$ *así el punto en coordenadas esféricas es* $(1,0,0)$

Ejemplo 5.52 *Pasar el punto* $(0,1,0)$ *en coordenadas cartesianas a coordenadas esféricas*

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{(0)^2+(1)^2+(0)^2} = 1, \tan\theta = \frac{y}{x}\ \ luego \theta = \pi/2, \cos\varphi = \frac{0}{r} = 0$$

entonces $\varphi = \pi/2$ *así el punto en coordenadas esféricas es* $(1,\pi/2,\pi/2)$.

Ejemplo 5.53 *Pasar el punto* $(0,0,-1)$ *en coordenadas cartesianas a coordenadas esféricas*

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{(0)^2+(0)^2+(-1)^2} = 1, \tan\theta = \frac{y}{x}\ \ luego \theta = 0, \cos\varphi = \frac{z}{r} = \frac{-1}{1} = -1$$

entonces $\varphi = \pi$ *así el punto en coordenadas esféricas es* $(1,0,\pi)$.

Ejemplo 5.54 *Pasar el punto* $\left(1,1,\sqrt{2}\right)$ *en coordenadas cartesianas a coordenadas esféricas*

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{(1)^2+(1)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2} = 2, \tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{1}{1} = 1\ \ luego \theta = \pi/4$$

$cos\varphi = \dfrac{z}{r} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, *entonces* $\varphi = \pi/4$, *así el punto en coordenadas esféricas es* $(2,\pi/4,\pi/4)$.

Ejemplo 5.55 *Pasar el punto* $\left(-1,-1,\sqrt{2}\right)$ *en coordenadas cartesianas a coordenadas esféricas*

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=2, \tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{-1}{-1}=1 \quad luego$$

$$\theta=\pi/4+\pi=5\pi/4, \cos\varphi=\frac{z}{r}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

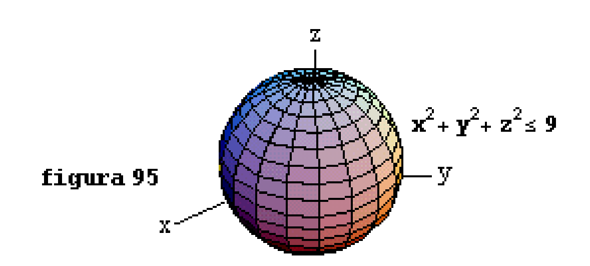
entonces $\varphi=\pi/4$, *así el punto en coordenadas esféricas es* $(2,5\pi/4,\pi/4)$.

Ahora mostraremos con ejemplos como es el cambio de variable cuando se aplican coordenadas cilíndricas y coordenadas esféricas

Ejemplo 5.56 *Calcular*

$$\iiint\limits_{\varphi(A)} x^2 \ dzdydx$$

donde $\varphi(A)=\left\{(x,y,z)\ /x^2+y^2+z^2\leq 9\right\}$ *fig 95*



Solución .

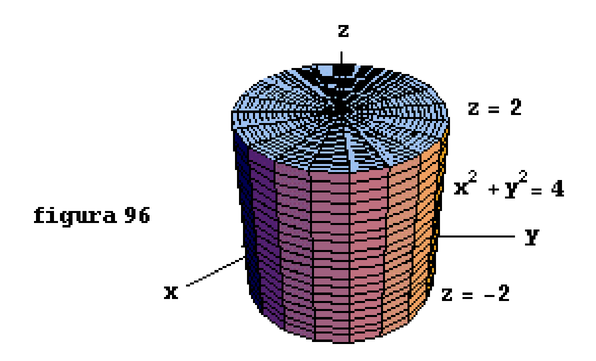
$$\iiint\limits_{\varphi(A)} x^2\ dzdydx=\int\limits_{-3}^{3}\int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int\limits_{-\sqrt{9-x^2-y^2}}^{\sqrt{9-x^2-y^2}} x^2dzdydx=\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{3}\int\limits_{-\sqrt{9-r^2}}^{\sqrt{9-r^2}}(r\cos\theta)^2\, rdzdrd\theta$$

$$=\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{3}\int\limits_{0}^{\pi}(r\cos\theta\sin\varphi)^2\, r^2\sin\varphi d\varphi drd\theta=\frac{324}{5}\pi.$$

Ejemplo 5.57 *Calcular*

$$\iiint_{\varphi(A)} z^2 \ dzdydx$$

$\varphi(A)$ *es el sólido limitado por el gráfico de las superficies* $x^2+y^2=4, \ \ z=2, \ \ z=-2$ *fig 96*



Solución Si $z=2$ entonces $r=2/\cos\varphi$. Si $z=-2$ entonces $r=-2/\cos\varphi$ Si $x^2+y^2=4$ entonces $(r\cos\theta\sin\varphi)^2+(r\sin\theta\sin\varphi)^2=r^2\sin^2\varphi=4$ luego $r=2/\sin\varphi$

$$\iiint_{\varphi(A)} z^2 \ dzdydx = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{-2}^{2} z^2 dzdydx = \int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_{-2}^{2} z^2 r dzdrd\theta = \frac{64}{3}\pi =$$

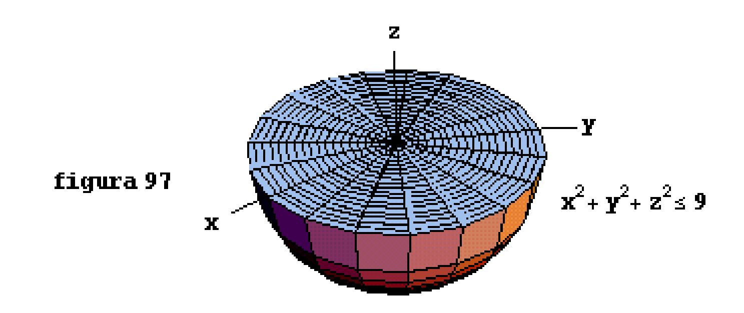
$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{2/\cos\varphi} (r\cos\varphi)^2 r^2 \sin\varphi drd\varphi d\theta \ \ + \int_0^{2\pi}\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\int_0^{2/\sin\varphi} (r\cos\varphi)^2 r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta +$$

$$\int_0^{2\pi}\int_{3\pi/4}^{\pi}\int_0^{-2/\cos\varphi} (r\cos\varphi)^2 r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta = \frac{64}{3}\pi.$$

Ejemplo 5.58 *Calcular*

$$\iiint_{\varphi(A)} \ dzdydx$$

donde $\varphi(A)=\{(x,y,z) \ /x^2+y^2+z^2\leq 9 \ \ , z\leq 0\}$ *fig 97*



Solución

$$\iiint\limits_{\varphi(A)} dzdydx = \int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{-\sqrt{9-x^2-y^2}}^{0} dzdydx = \int_0^{2\pi}\int_0^3\int_{-\sqrt{9-r^2}}^{0} rdzdrd\theta = 18\pi$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^3\int_{\pi/2}^{\pi} r^2 \sin\varphi d\varphi drd\theta = 18\pi$$

Ejemplo 5.59 *Calcular*

$$\iiint\limits_{\varphi(A)} dzdydx$$

donde $\varphi(A) = \{(x,y,z)\ /x^2+y^2+z^2 \le 9 \quad x \le 0\ ,\ y \le 0,\ z \ge 0\}$

Solución .

$$\iiint\limits_{\varphi(A)} dzdydx = \int_{-3}^{0}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{0}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2-y^2}} dzdydx = \int_{\pi}^{3\pi/2}\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-r^2}} rdzdrd\theta = \frac{9}{2}\pi$$

$$= \int_{\pi}^{3\pi/2}\int_0^3\int_0^{\pi/2} r^2 \sin\varphi d\varphi drd\theta = \frac{9}{2}\pi.$$

Ejemplo 5.60 *Calcular*

$$\iiint\limits_{\varphi(A)} dzdydx$$

donde $\varphi(A) = \{(x, y, z) / x^2 + y^2 + z^2 \leq 9 \quad x \leq 0 \ , \ \ y \geq 0\}$

Solución

$$\iiint\limits_{\varphi(A)} dzdydx = \int\limits_{-3}^{0} \int\limits_{0}^{\sqrt{9-x^2}} \int\limits_{-\sqrt{9-x^2-y^2}}^{\sqrt{9-x^2-y^2}} dzdydx = \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \int\limits_{0}^{3} \int\limits_{-\sqrt{9-r^2}}^{\sqrt{9-r^2}} rdzdrd\theta = 9\pi$$

$$= \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \int\limits_{0}^{3} \int\limits_{0}^{\pi} r^2 \sin\varphi d\varphi drd\theta = 9\pi.$$

Ejemplo 5.61 *Calcular*

$$\iiint\limits_{\varphi(A)} dzdydx$$

$\varphi(A)$ *es el sólido limitado por el gráfico de las superficies* $x^2 + y^2 = z$, $z = 4$, *,fig100*

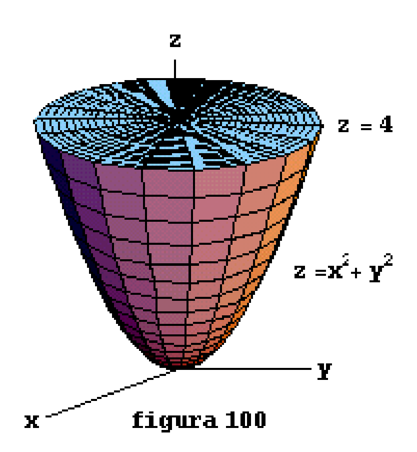


figura 100

Solución La curva de intersección de las dos superficies es $x^2 + y^2 = 4$. $\varphi = ar\tan 1/2$

$z = 4$, entonces $r = 4/\cos\varphi$, y $z = x^2 + y^2$, $r = \cos\varphi / (\sin\varphi)^2$, luego

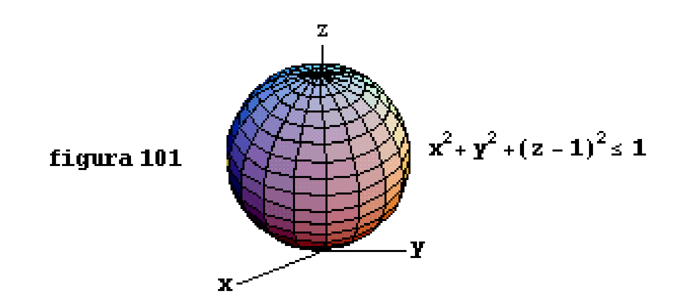
$$\iiint\limits_{\varphi(A)} dzdydx = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{4} dzdydx = \int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_{r^2}^{4} rdzdrd\theta = 8\pi =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\arctan 1/2}\int_0^{4/\cos\varphi} r^2 \sin\varphi drd\varphi d\theta + \int_0^{2\pi}\int_{\arctan 1/2}^{\pi/2}\int_0^{\cos\varphi/(\sin\varphi)^2} r^2 \sin\varphi drd\varphi d\theta.$$

Ejemplo 5.62 *Calcular*

$$\iiint\limits_{\varphi(A)} dzdydx$$

donde $\varphi(A) = \{(x,y,z)\,/x^2+y^2+(z-1)^2 \leq 1\}$ *fig 101*



Solución Si $x^2+y^2+(z-1)^2 = 1$ entonces $z = 1 \pm \sqrt{1-x^2-y^2}$

$$\iiint\limits_{\varphi(A)} dzdydx = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}} dzdydx = \int_0^{2\pi}\int_0^{1}\int_{1-\sqrt{1-r^2}}^{1+\sqrt{1-r^2}} rdzdrd\theta = \frac{4}{3}\pi$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\varphi} r^2 \sin\varphi drd\varphi d\theta = \frac{4}{3}\pi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} r^2 \sin\varphi drd\varphi d\theta$$

Ejemplo 5.63 *Calcular*

$$\iiint\limits_{\varphi(A)} \left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}} dzdydx$$

donde $\varphi(A) = \{(x,y,z)\ /1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4\}$

Solución

$$\iiint\limits_{\varphi(A)} \left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}} \; dzdydx = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{-\sqrt{1-x^2-y^2}} \left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}} dzdydx +$$

$$\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}} dzdydx + \int_{-2}^{-1} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}} dzdydx +$$

$$\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}} dzdydx + \int_{-1}^{1} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}} dzdydx +$$

$$\int_{1}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}} dzdydx = \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{1} \int_{-\sqrt{4-r^2}}^{-\sqrt{1-r^2}} dzdrd\theta + \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{1} \int_{\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} dzdrd\theta +$$

$$\int_{0}^{2\pi} \int_{1}^{2} \int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} dzdrd\theta = \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{\pi} \int_{1}^{2} \; rdrd\varphi d\theta = 6\pi$$

Ejemplo 5.64 *Calcular*

$$\iiint\limits_{\varphi(A)} \left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}} \; dzdydx$$

donde $\varphi(A)$ *está limitado por* $x^2+y^2+z^2=16$ *y* $x^2+y^2=4$ *fuera de éste*

$$\iiint\limits_{\varphi(A)} \left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}} \; dzdydx = \int_{-4}^{-2} \int_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} \int_{-\sqrt{16-x^2-y^2}}^{\sqrt{16-x^2-y^2}} \left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}} dzdydx$$

$$+ \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{16-x^2}}^{-\sqrt{4-x^2}} \int_{-\sqrt{16-x^2-y^2}}^{\sqrt{16-x^2-y^2}} \left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}} dzdydx + \int_{-2}^{2} \int_{\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} \int_{-\sqrt{16-x^2-y^2}}^{\sqrt{16-x^2-y^2}} \left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}} dzdydx +$$

$$\int_{2}^{4}\int_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}}\int_{-\sqrt{16-x^2-y^2}}^{\sqrt{16-x^2-y^2}}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}dzdydx=\int_{0}^{2\pi}\int_{2}^{4}\int_{-\sqrt{16-r^2}}^{\sqrt{16-r^2}}dzdrd\theta$$

$$=\int_{0}^{2\pi}\int_{\pi/6}^{5\pi/6}\int_{2/\sin\varphi}^{4}rdrd\varphi d\theta=-\frac{8}{3}\pi\frac{-3\sqrt{3}+4\pi}{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(-2+\sqrt{3}\right)}.$$

Ejemplo 5.65 *Calcular*

$$\iiint_{\varphi(A)} dzdydx$$

$\varphi(A)$ *es el sólido limitado por el gráfico de la superficie* $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ *fig 105*

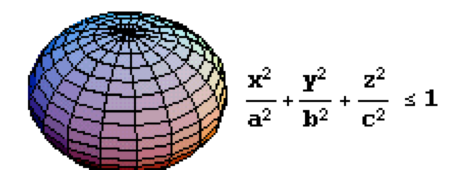


figura 105

$x/a=r\cos\theta\sin\varphi,\ y/b=r\sin\theta\sin\varphi,\ z/c=r\cos\varphi$ luego
$\varphi(r,\theta,\varphi)=(ar\cos\theta\sin\varphi, br\sin\theta\sin\varphi, cr\cos\varphi)\quad J_\varphi=-abcr^2\sin\varphi$ y así

$$\iiint_{\varphi(A)} dzdydx=\int_{-a}^{a}\int_{(-b/a)\sqrt{a^2-x^2}}^{(b/a)\sqrt{a^2-x^2}}\int_{-c\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}}^{c\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}}dzdydx=\int_{0}^{1}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\pi}abcr^2\sin\varphi d\varphi d\theta dr=\frac{4}{3}\pi abc.$$

Ejemplo 5.66 *Calcular*

$$\iiint_{\varphi(A)} dzdydx$$

$\varphi(A)$ *es el sólido limitado por el gráfico de las superficies* $x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=4,$

$z=-2,\ z=3$

Solución

$$\iiint\limits_{\varphi(A)} dzdydx = \int_0^{2\pi}\int_1^{2}\int_{-2}^{3} rdzdrd\theta = 15\pi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\arctan 2/3}\int_0^{3/\cos\varphi} r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta +$$

$$\int_0^{2\pi}\int_{\arctan 2/3}^{3\pi/4}\int_0^{2/\sin\varphi} r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta + \int_0^{2\pi}\int_{3\pi/4}^{\pi}\int_0^{-2/\cos\varphi} r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta -$$

$$\left(\int_0^{2\pi}\int_0^{\arctan 1/3}\int_0^{3/\cos\varphi} r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta + \int_0^{2\pi}\int_{\arctan 1/3}^{\pi-\arctan 1/3}\int_0^{1/\sin\varphi} r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta + \int_0^{2\pi}\int_{\pi-\arctan 1/2}^{\pi}\int_0^{-2/\cos\varphi} r^2\sin\varphi dr\right.$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_{\arctan 1/3}^{\arctan 2/3}\int_{1/\sin\varphi}^{3/\cos\varphi} r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta + \int_0^{2\pi}\int_{\arctan 2/3}^{3\pi/4}\int_{1/\sin\varphi}^{2/\sin\varphi} r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta +$$

$$\int_0^{2\pi}\int_{3\pi/4}^{\pi-\arctan 1/2}\int_{1/\sin\varphi}^{-2/\cos\varphi} r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta.$$

Ejemplo 5.67 *Calcular*

$$\iiint\limits_{\varphi(A)} xyz\ dzdydx$$

$\varphi(A)$ *es el sólido limitado por el gráfico de las superficies* $xy = 1$*,* $xy = 4$*,* $xz = 1$*,* $xz = 9$ $yz = 4, = yz = 9$ *primer octante .*

Solución . $u = xy$, $v = xz$, $w = yz$, luego $1 \leq u \leq 4$, $1 \leq v \leq 9$, $4 \leq w \leq 9$, $uvw = x^2y^2z^2$ entonces $xyz = \sqrt{uvw}$.

$$J_{\varphi^{-1}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x & 0 \\ z & 0 & x \\ 0 & z & y \end{vmatrix} = -2yxz \quad \text{y}$$

$$\iiint\limits_{\varphi(A)} xyz\ dzdydx = \int_1^4\int_1^9\int_4^9 \frac{1}{2}dwdvdu = 60.$$

Ejemplo 5.68 *Calcular*

$$\iiint\limits_{\varphi(A)} dzdydx$$

$\varphi(A)$ *es el sólido limitado por el gráfico de las superficies*

$x+y+z=0,\ \ x+y-z=0,\ \ x-y-z=0,\ \ 2x-z=1.$

Solución $u=x+y+z,\ \ v=x+y-z,\ \ w=\ x-y-z$, entonces $u=0, v=0, w=0$ y $2x-z=1$, se transforma en $u+w-\frac{1}{2}(u-v)=1$.

(ya que $u+w\ =2x$, $u-v=2z$ luego $z=\dfrac{u-v}{2}$) y esto implica que $u+v+2w=2$ y asì

$$\iiint\limits_{\varphi(A)} dzdydx = \int\limits_0^2 \int\limits_0^{2-u} \int\limits_0^{1-\left(\frac{u+v}{2}\right)} \frac{1}{4}dwdvdu = \frac{1}{6}$$

Ejercicio 14 *Colocar límites en la integral* $\iiint\limits_{\varphi(A)} z\, dzdydx$ *sin cambio de variable, en cilíndricas o en esféricas*

1. $\varphi(A)$ limitado por las gráficas de las superficies $z^2 = \dfrac{h^2}{R^2}(x^2+y^2)$, $z = h \geq 0$ Respuesta

$$\int\limits_{-R}^{R} \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \int\limits_{\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}}^{h} zdzdydx = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{R} \int\limits_{\frac{hr}{R}}^{h} rzdzdrd\theta = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\arctan\frac{R}{h}} \int\limits_0^{\frac{h}{\cos\varphi}} r^2 \sin\varphi r \cos\varphi drd\varphi d\theta$$

2. $\varphi(A)$ limitado por las gráficas de las superficies $z = -\sqrt{x^2+y^2}$, $z\ = -1$ Respuesta

$$\int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int\limits_{-1}^{-\sqrt{x^2+y^2}} zdzdydx = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{1} \int\limits_{-1}^{-r} rzdzdrd\theta = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \int\limits_0^{\frac{-1}{\cos\varphi}} (r^2\sin\varphi) r\cos\varphi drd\varphi d\theta$$

3. $\varphi(A)$ limitado por las gráficas de las superficies $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = 1$ común, Respuesta

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} zdzdydx = \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{4-r^2}} rzdzdrd\theta =$$

$$= \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\int_{0}^{2} r^2 \sin\varphi r \cos\varphi drd\varphi d\theta + \int_{0}^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{\frac{1}{\sin\varphi}} r^2 \sin\varphi r \cos\varphi drd\varphi d\theta$$

4. $\varphi(A)$ limitado por las gráficas de las superficies $z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 1$ Respuesta

$$\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{1}^{4-\sqrt{x^2+y^2}} zdzdydx = \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{3}\int_{1}^{4-r} rzdzdrd\theta =$$

$$= \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\arctan 3}\int_{\frac{1}{\cos\varphi}}^{\frac{4}{\cos\varphi+\sin\varphi}} r^2 \sin\varphi r \cos\varphi drd\varphi d\theta$$

5. $\varphi(A)$ limitado por las gráficas de las superficies $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = z$ Respuesta

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{0}^{x^2+y^2} zdzdydx = \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{2}\int_{0}^{r^2} rzdzdrd\theta = \int_{0}^{2\pi}\int_{\arctan\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}}^{\frac{2}{\sin\varphi}} r^2 \sin\varphi r \cos\varphi drd\varphi d\theta$$

6. $\varphi(A)$ limitado por las gráficas de las superficies $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$, $\sqrt{x^2 + y^2} = z$, parte común Respuesta

$$= \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{1}\int_{r}^{1+\sqrt{1-r^2}} rzdzdrd\theta = \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\int_{0}^{2\cos\varphi} (r^2 \sin\varphi) r \cos\varphi drd\varphi d\theta$$

7. $\varphi(A)$ limitado por las gráficas de las superficies $z = 1$, $\sqrt{9 - x^2 - y^2} = z$ Respuesta

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{8}}\int_1^{\sqrt{9-r^2}} rzdzdrd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\arctan\sqrt{8}}\int_{\frac{1}{\cos\varphi}}^{3} r\cos\varphi . r^2 \sin\varphi drd\varphi d\theta$$

8. $\varphi(A)$ limitado por las gráficas de las superficies $z = 6 - x^2 - y^2$, $y = x$, $y = 0$, $x = 1$ Respuesta

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{1}{\cos\theta}}\int_0^{6-r^2} rzdzdrd\theta$$

9. Pasar la integral a Cilindricas o esféricas $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}} dzdydx$ Respuesta

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{1}\int_{1-\sqrt{1-r^2}}^{1+\sqrt{1-r^2}} rdzdrd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\varphi} (r^2\sin\varphi)drd\varphi d\theta$$

10. Pasar la integral a Cilindricas o esféricas $\int_0^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0}\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{0} dzdydx$ Respuesta

$$\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\int_0^{1}\int_{-\sqrt{1-r^2}}^{0} rdzdrd\theta = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\int_0^{1}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(r^2\sin\varphi)d\varphi drd\theta$$

11. Pasar la integral a Cilindricas o esféricas $\int_0^{4}\int_0^{\sqrt{16-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{4} dzdydx$ Respuesta

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{4}\int_r^{4} rdzdrd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{4}{\cos\varphi}}(r^2\sin\varphi)drd\varphi d\theta$$

12. Pasar la integral a Cilindricas o esféricas $\int_0^1 \int_x^{\sqrt{2-x^2}} \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} dzdydx$ Respuesta

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^r rdzdrd\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{\sin\varphi}} (r^2 \sin\varphi) drd\varphi d\theta$$

13. Pasar la integral a Cilindricas o esféricas $\int_0^{\sqrt{2}} \int_y^{\sqrt{4-y^2}} \int_0^2 dzdxdy$ Respuesta

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^2 \int_0^2 rdzdrd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{2}{\cos\varphi}} (r^2 \sin\varphi) drd\varphi d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{2}{\sin\varphi}} (r^2 \sin\varphi) drd\varphi d\theta$$

14. Pasar la integral a Cilindricas o esféricas $\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} dzdydx$ Respuesta

$$\int_0^{\pi} \int_0^1 \int_r^{\sqrt{2-r^2}} rdzdrd\theta = \int_0^{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sqrt{2}} (r^2 \sin\varphi) drd\varphi d\theta$$

15. Pasar la integral a Cilindricas o esféricas $\int_0^4 \int_{-\sqrt{16-x^2}}^0 \int_0^{\sqrt{16-x^2-y^2}} dzdydx$ Respuesta

$$\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-r^2}} rdzdrd\theta = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^4 (r^2 \sin\varphi) drd\varphi d\theta$$

16. Pasar la integral a Cilindricas o esféricas $\int_0^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^0 \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} dzdydx$ Respuesta

$$\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \int_0^2 \int_r^{\sqrt{8-r^2}} rdzdrd\theta = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sqrt{8}} (r^2 \sin\varphi) drd\varphi d\theta$$

17. Pasar la integral a Cilindricas o esféricas $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sqrt{x^2+y^2+z^2}e^{-\left(x^2+y^2+z^2\right)}dzdydx$ Respuesta

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sqrt{r^2+z^2}e^{-(r^2+z^2)}rdzdrd\theta=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\pi}re^{-r^2}(r^2\sin\varphi)d\varphi drd\theta$$

18. Pasar la integral a Cilindricas o esféricas $\iiint\limits_{\varphi(A)} e^{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}dzdydx$ si $\varphi(A)$ limitado por $x^2+y^2+z^2=1$ Respuesta

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{1}\int\limits_{-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^r}}e^{-(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}rdzdrd\theta=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{1}\int\limits_0^{\pi}e^{r^3}(r^2\sin\varphi)d\varphi drd\theta$$

19. Que conjunto del espacio maximiza el valor de $\iiint\limits_{\varphi(A)}(1-x^2-y^2-z^2)\,dzdydx$ Respuesta

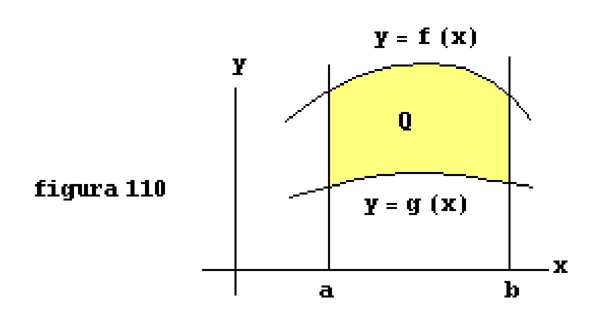
$$x^2+y^2+z^2\leq 1$$

Capítulo 6

Aplicaciones de las integrales

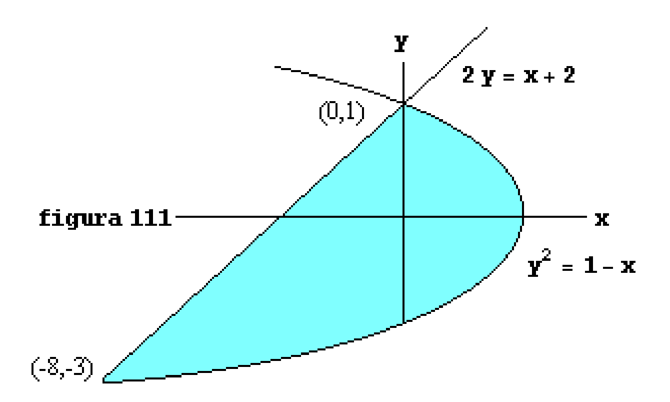
6.1 Area entre curvas.

Recordemos que si $f(x)-g(x)\geq 0$, entonces $\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx$, representa el àrea encerrada por $y=f(x)$, $y=g(x)$, $x=a$, $x=b$ y el eje x fig 110



$$A(Q)=\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx=\int_a^b\int_{g(x)}^{f(x)} dydx=\iint_Q dydx$$

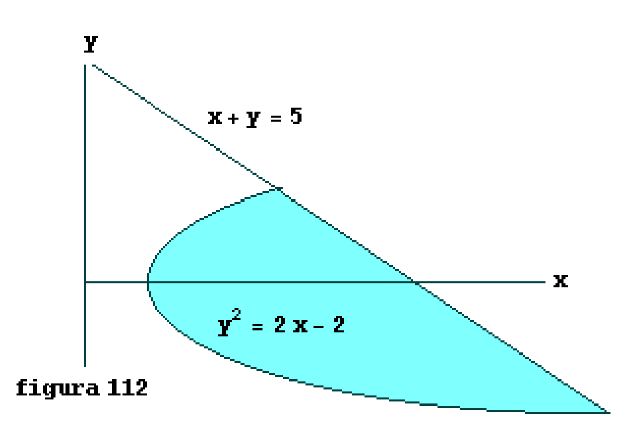
Ejemplo 6.1 *Hallar el área limitada por el gráfico de* $y^2=1-x$, $2y=x+2$ *fig 111*



Los puntos de intersección de las ecuaciones es $(0,1)$ y $(-8,-3)$ luego

$$A(Q)=\iint_Q dydx=\int_{-8}^{0}\int_{-\sqrt{1-x}}^{(x+2)/2} dydx+\int_{0}^{1}\int_{-\sqrt{1-x}}^{\sqrt{1-x}} dydx=\int_{-3}^{1}\int_{2y-2}^{1-y^2} dxdy=\frac{32}{3}$$

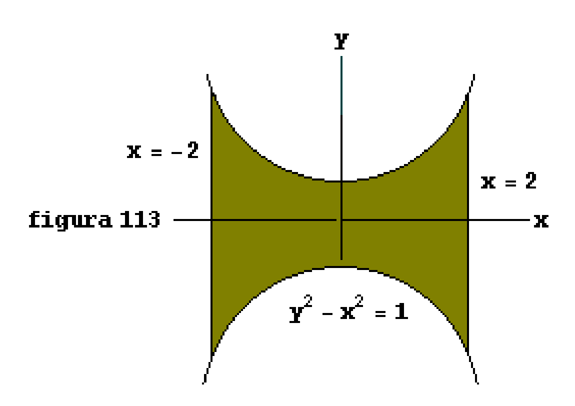
Ejemplo 6.2 *Hallar el área limitada por los gráficos de* $y^2=2x-2$, $x+y=5$ *fig 112*



Los puntos de intersección de las ecuaciones son $(3,2)$ y $(9,-4)$, despeje y de $x+y=5$ y reemplácelo en $y^2=2x-2$

$$A(Q)=\iint_Q dydx=\int_{-4}^{2}\int_{\frac{y^2+2}{2}}^{5-y} dxdy=\int_{1}^{3}\int_{-\sqrt{2x-2}}^{\sqrt{2x-2}} dydx+\int_{3}^{9}\int_{-\sqrt{2x-2}}^{5-x} dydx=18$$

Ejemplo 6.3 *Hallar el área limitada por los gráficos de* $y^2-x^2=1$, $x=\pm 2$ *.fig 113*

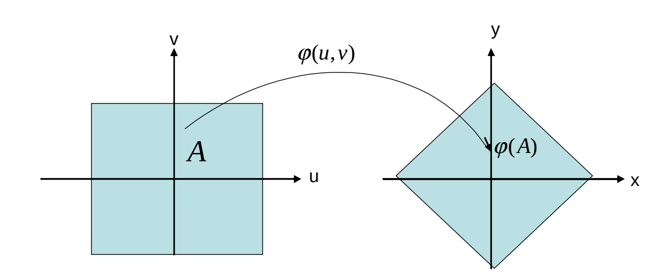


Los puntos de intersección de las ecuaciones son $\left(2,\pm\sqrt{5}\right)$, $\left(-2,\pm\sqrt{5}\right)$ luego

$$A(Q)=\iint\limits_{Q} dydx=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{x^2+1}}^{\sqrt{x^2+1}} dydx=\int_{-1}^{1}\int_{-2}^{2} dxdy+\int_{-\sqrt{5}}^{-1}\int_{-2}^{-\sqrt{y^2-1}} dxdy$$

$$+\int_{-\sqrt{5}}^{-1}\int_{\sqrt{y^2-1}}^{2} dxdy+\int_{1}^{\sqrt{5}}\int_{-2}^{-\sqrt{y^2-1}} dxdy+\int_{1}^{\sqrt{5}}\int_{\sqrt{y^2-1}}^{2} dxdy.$$

Ejemplo 6.4 *Hallar el área limitada por el gráfico de $|x|+|y|\leq 4$. fig 114*



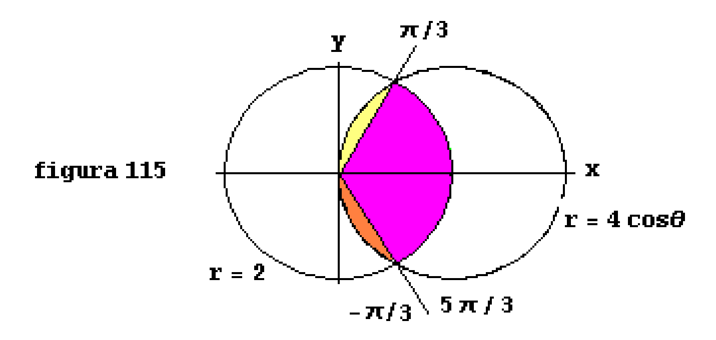
Sea $u=x+y$ entonces $u=4$ y $u=-4$ y $v=x-y$ entonces $v=4$ y $v=-4$, $x=\dfrac{u}{2}+\dfrac{v}{2}$, $y=\dfrac{u}{2}-\dfrac{v}{2}$, luego

$$A=[-4,4]\times[-4,4]\,,\quad J_{\varphi}=-\frac{1}{2}\ \ y\ \ f(\varphi(u,v))=f(\frac{u}{2}+\frac{v}{2},\frac{u}{2}-\frac{v}{2})=1$$

entonces

$$\iint_{\varphi(A)} dxdy = \int_{-4}^{0}\int_{-4-x}^{4+x} dydx + \int_{0}^{4}\int_{x-4}^{4-x} dydx = \int_{-4}^{4}\int_{-4}^{4}\left|-\frac{1}{2}\right| dudv = \frac{1}{2}\int_{-4}^{4}\int_{-4}^{4} dudv \ = 32$$

Ejemplo 6.5 *Hallar el área limitada por los gráficos de* $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=4x$ *(común) fig 115*

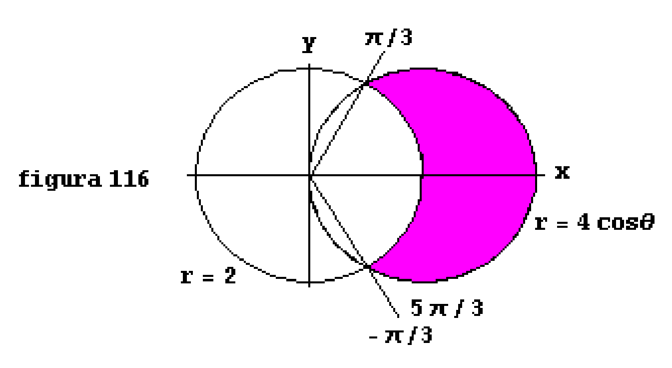


Los puntos de intersecciòn de las ecuaciones son $\left(1,\sqrt{3}\right)$ y $\left(1,-\sqrt{3}\right)$,que se obtienen igualando las curvas. De $x^2+y^2=4$ se tiene que $y=\pm\sqrt{4-x^2}$, y que $x=\pm\sqrt{4-y^2}$ $x^2+y^2=4x$ equivale a $(x-2)^2+y^2=4$ y de aquí $x=2\pm\sqrt{4-y^2}$ y $y=\pm\sqrt{4x-x^2}$ luego

$$A(Q)=\iint_{Q} dydx = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\int_{2-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} dxdy = \int_{0}^{1}\int_{-\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{4x-x^2}} dydx+\int_{1}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dydx = -2\sqrt{3}+\frac{8}{3}\pi$$

$$=\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\int_{0}^{2} rdrd\theta+\int_{\pi/3}^{\pi/2}\int_{0}^{4\cos\theta} rdrd\theta+\int_{3\pi/2}^{5\pi/3}\int_{0}^{4\cos\theta} rdrd\theta = -2\sqrt{3}+\frac{8}{3}\pi = 2\left(\int_{0}^{\pi/3}\int_{0}^{2} rdrd\theta+\int_{\pi/3}^{\pi/2}\int_{0}^{4\cos\theta} rdrd\theta\right)$$

Ejemplo 6.6 *Hallar el área limitada por los gráficos de* $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=4x$ *(exterior a* $x^2+y^2=4$ *y interior a* $x^2+y^2=4x$ *) fig 116*

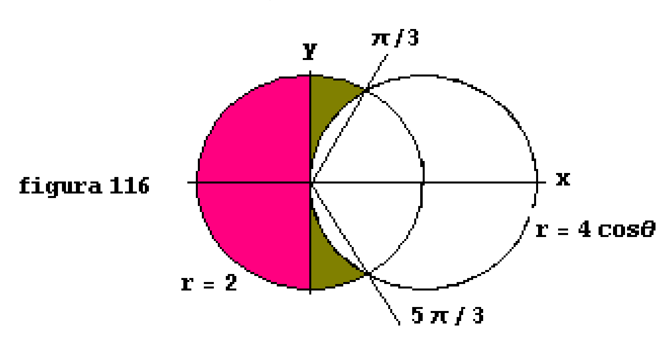


$$A(Q)=\iint_Q dydx=\int_1^2\int_{\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4x-x^2}}dydx+\int_1^2\int_{-\sqrt{4x-x^2}}^{-\sqrt{4-x^2}}dydx+\int_2^4\int_{-\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{4x-x^2}}dydx=\frac{4}{3}\pi+2\sqrt{3}=$$

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\int_{\sqrt{4-y^2}}^{2+\sqrt{4-y^2}}dxdy+\int_{-2}^{-\sqrt{3}}\int_{2-\sqrt{4-y^2}}^{2+\sqrt{4-y^2}}dxdy+\int_{\sqrt{3}}^{2}\int_{2-\sqrt{4-y^2}}^{2+\sqrt{4-y^2}}dxdy=\frac{4}{3}\pi+2\sqrt{3}$$

$$=\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\int_2^{4\cos\theta}rdrd\theta=\int_0^{\pi/3}\int_2^{4\cos\theta}rdrd\theta+\int_{5\pi/3}^{2\pi}\int_2^{4\cos\theta}rdrd\theta=\frac{4}{3}\pi+2\sqrt{3}$$

Ejemplo 6.7 *Hallar el área limitada por los gráficos de* $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=4x$ *(interior a* $x^2+y^2=4$ *y exterior a* $x^2+y^2=4x$ *) fig 117*



$$A(Q)=\iint_Q dydx=\int_{-2}^{0}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}dydx+\int_0^1\int_{\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}dydx+\int_0^1\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{4x-x^2}}dydx=\frac{4}{3}\pi+2\sqrt{3}$$

$$=\int_{\pi/3}^{\pi/2}\int_{4\cos\theta}^{2}rdrd\theta+\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\int_0^2 rdrd\theta+\int_{3\pi/2}^{5\pi/3}\int_{4\cos\theta}^{2}rdrd\theta=\frac{4}{3}\pi+2\sqrt{3}\ .$$

Ejemplo 6.8 *Hallar el área limitada por el gráfico de* $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ *fig 118*

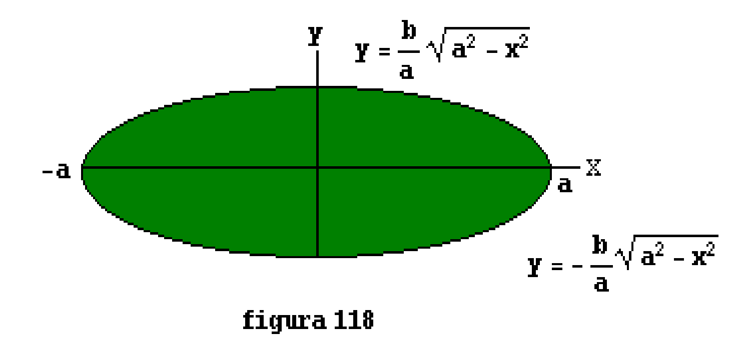


figura 118

Solución $x = ar\cos\theta \quad y = br\sin\theta,\ \varphi(r,\theta) = (x,y) = (ar\cos\theta, br\sin\theta)$

$$J_{\varphi} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ bsen\theta & rb\cos\theta \end{vmatrix} = abr$$

$$A(Q) = \iint\limits_{Q} dydx = \int_{-a}^{a} \int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dydx = \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{1} abrdrd\theta = \pi ab$$

Ejemplo 6.9 *Hallar el área encerrada por el gráfico de* $x + 2y = 2$, $y - x = 1$, $2x + y = 7$ *fig 119*

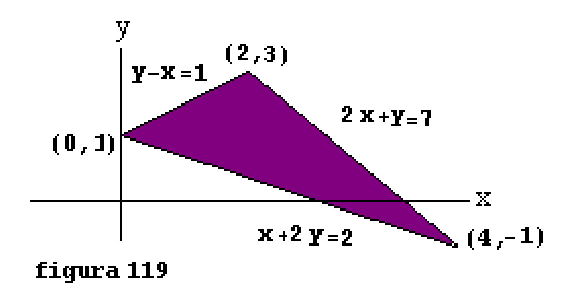


figura 119

Solución Los puntos de intersección de las ecuaciones son $(2,3), (0,1)$, $(4,-1)$ que se obtienen solucionando el sistema de ecuaciones $x + 2y = 2$, $y - x = 1$, $2x + y = 7$, luego

$$A(Q) = \iint\limits_{Q} dydx = \int_{0}^{2} \int_{\frac{2-x}{2}}^{1+x} dydx + \int_{2}^{4} \int_{\frac{2-x}{2}}^{7-2x} dydx = 6$$

Ejemplo 6.10 *Mostrar que el área encerrada por el gráfico de* $x^2+y^2=x$, $x^2+y^2=y$ *viene dado por fig 120*

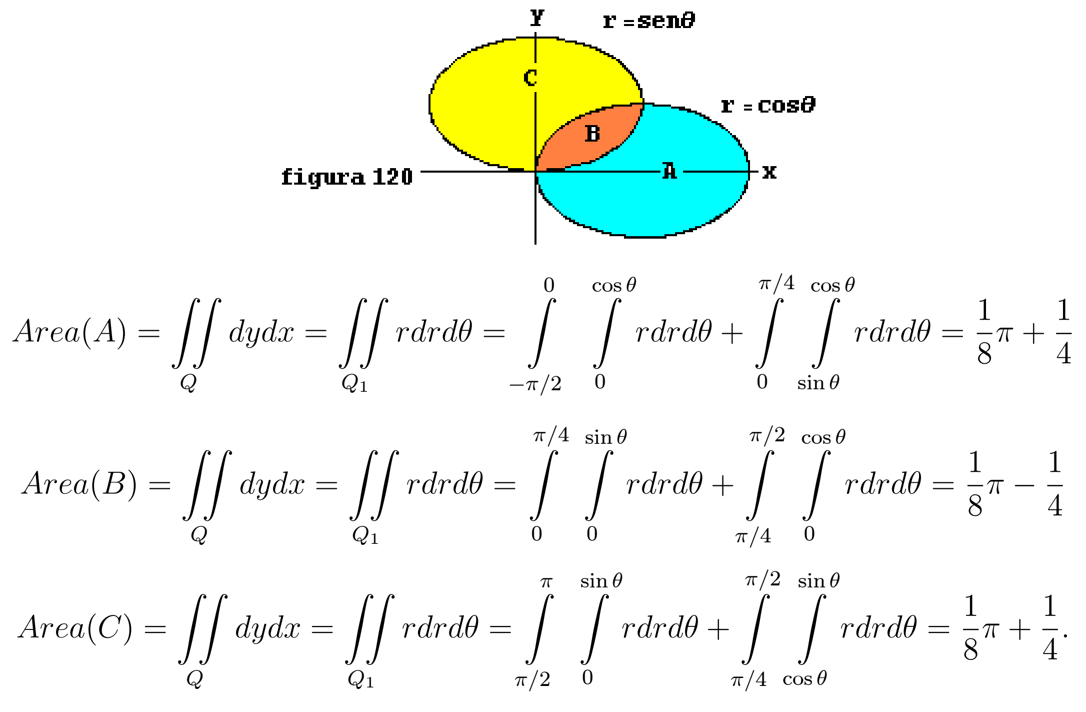


figura 120

$$Area(A)=\iint\limits_{Q} dydx=\iint\limits_{Q_1} rdrd\theta=\int\limits_{-\pi/2}^{0}\int\limits_{0}^{\cos\theta} rdrd\theta+\int\limits_{0}^{\pi/4}\int\limits_{\sin\theta}^{\cos\theta} rdrd\theta=\frac{1}{8}\pi+\frac{1}{4}$$

$$Area(B)=\iint\limits_{Q} dydx=\iint\limits_{Q_1} rdrd\theta=\int\limits_{0}^{\pi/4}\int\limits_{0}^{\sin\theta} rdrd\theta+\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\int\limits_{0}^{\cos\theta} rdrd\theta=\frac{1}{8}\pi-\frac{1}{4}$$

$$Area(C)=\iint\limits_{Q} dydx=\iint\limits_{Q_1} rdrd\theta=\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\int\limits_{0}^{\sin\theta} rdrd\theta+\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\int\limits_{\cos\theta}^{\sin\theta} rdrd\theta=\frac{1}{8}\pi+\frac{1}{4}.$$

Ejemplo 6.11 *Mostrar que el área encerrada por el gráfico de* $r=\cos\theta$ *y* $r=1-cos\theta$ *viene dado por fig121*

r = 1 - cosθ
Y
r = cosθ
C
A
X
figura 121

$$Area(A)=\iint\limits_{Q} dydx=\iint\limits_{Q_1} rdrd\theta=\int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3}\int\limits_{1-\cos\theta}^{\cos\theta} rdrd\theta=-\frac{1}{3}\pi+\sqrt{3}$$

$$Area(B)=\iint\limits_{Q} dydx=\iint\limits_{Q_1} rdrd\theta=2(\int\limits_{0}^{\pi/3}\int\limits_{0}^{1-\cos\theta} rdrd\theta+\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2}\int\limits_{0}^{\cos\theta} rdrd\theta)=\frac{7}{12}\pi-\sqrt{3}.$$

$$Area(C) = \iint_Q dydx = \iint_{Q_1} rdrd\theta = \int_{\pi/3}^{\pi/2}\int_{\cos\theta}^{1-\cos\theta} rdrd\theta + \int_{\pi/2}^{3\pi/2}\int_{0}^{1-\cos\theta} rdrd\theta +$$

$$\int_{3\pi/2}^{5\pi/3}\int_{\cos\theta}^{1-\cos\theta} rdrd\theta = \frac{11}{12}\pi + \sqrt{3}$$

Ejemplo 6.12 *Mostrar que el área encerrada por el gráfico de $r = 1 + \sin\theta$ viene dado por fig 122*

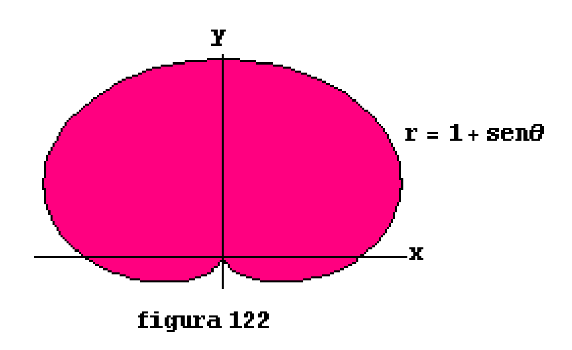


figura 122

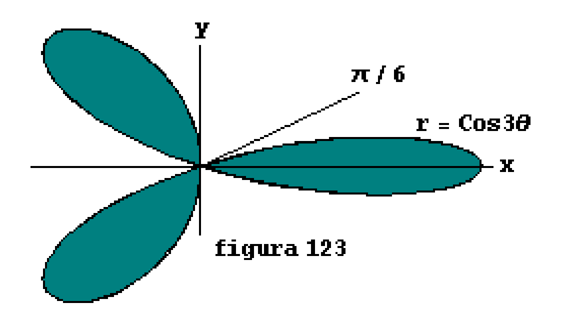
$$Area = \iint_Q dydx = \iint_{Q_1} rdrd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{1+\sin\theta} rdrd\theta = \frac{3}{2}\pi$$

Ejemplo 6.13 *Mostrar que el área encerrada por el gráfico de $r^2 = \sin 2\theta$ viene dado por fig 122*

$\sin 2\theta = 0$ si $2\theta = \pi$, es decir, $\theta = \pi/2$

$$Area = \iint_Q dydx = \iint_{Q_1} rdrd\theta = 2\int_0^{\pi/2}\int_0^{\sqrt{\sin 2\theta}} rdrd\theta = 1$$

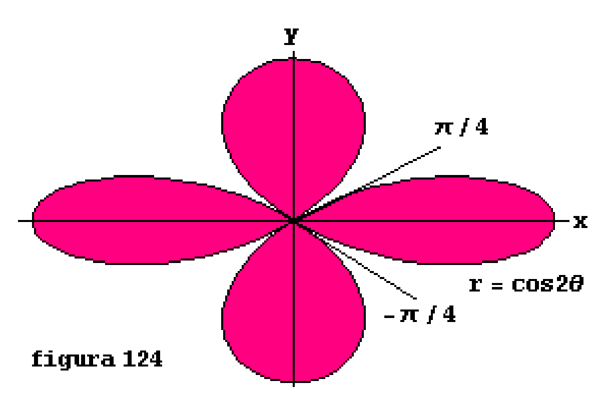
Ejemplo 6.14 *Mostrar que el área encerrada por el gráfico de $r = \cos 3\theta$ viene dado por fig 123*



$\cos 3\theta \ = 0$ si $3\theta = \pi/2$, es decir, $\theta = \pi/6$

$$Area = \iint\limits_{Q} dydx = \iint\limits_{Q_1} rdrd\theta = 6\int\limits_{0}^{\pi/6}\int\limits_{0}^{\cos 3\theta} rdrd\theta = \frac{1}{4}\pi$$

Ejemplo 6.15 *Mostrar que el área encerrada por el gráfico de $r = \cos 2\theta$ viene dado por fig124*



$\cos 2\theta \ = 0$ si $2\theta = \pi/2$, es decir, $\theta = \pi/4$

$$Area = \iint\limits_{Q} dydx = \iint\limits_{Q_1} rdrd\theta = 8\int\limits_{0}^{\pi/4}\int\limits_{0}^{\cos 2\theta} rdrd\theta = \frac{1}{2}\pi.$$

Ejercicio 15

1. Hallar el área de la región limitada por los gráficos de $y = 2x^2$, $y = x^2$, $x = y^2$, $x = 4y^2$ primer cuadrante. Respuesta $\int\limits_{1}^{4}\int\limits_{1}^{2} \frac{dudv}{3u^2v^2} = \frac{1}{8}$

2. Hallar el área de la región limitada por los gráficos de $2y^2 = x+4, x = y^2$ Respuesta $\int_{-2}^{2}\int_{2y^2-4}^{y^2} dxdy = \frac{32}{3}$

3. Hallar el àrea de la región limitada por los gràficos de $y = x, y = -x+4, y = -x+2,$ $y = 0.$ Respuesta $\int_{2}^{4}\int_{0}^{u} \frac{1}{2}dvdu = 3$

4. Hallar el área de la región limitada por los gráficos de $y = x + 1, y = x - 3,$ $y = -\dfrac{x}{3} + \dfrac{7}{9}, y = -\dfrac{x}{3} + 5$ Respuesta $\int_{\frac{7}{9}}^{5}\int_{-3}^{1} \frac{3}{4}dudv = \frac{38}{3}$

5. Hallar el área de la región limitada por los gráficos de $xy = 1, xy = 4, y = 1, y = 4$ primer cuadrante Respuesta $\int_{1}^{4}\int_{1}^{4} \frac{1}{v}dudv = 3\ln 4$

6. Hallar el área de la región limitada por los gráficos de $xy = 1$, $xy = 2$, $x = 1$, $x = 4$ primer cuadrante Respuesta $\int_{1}^{4}\int_{1}^{2} \frac{1}{v}dudv = \ln 4$

7. Hallar el área de la región limitada por los gráficos de $x = y^2 - 1$, $x = 2y^2 - 2$ Respuesta $\int_{-1}^{1}\int_{2y^2-2}^{y^2-1} dxdy = \frac{4}{3}$

8. Hallar el àrea de la región limitada por los gràficos de $x = \dfrac{y^2}{2} - 3, x = y+1$ Respuesta $\int_{-2}^{4}\int_{\frac{y^2}{2}-3}^{y+1} dxdy = 18 = \int_{-3}^{-1}\int_{-\sqrt{2x+6}}^{\sqrt{2x+6}} dydx + \int_{-1}^{5}\int_{x-1}^{\sqrt{2x+6}} dydx$

9. Hallar el área de la región limitada por los gráficos de $x = y - y^2$, $y = -x$ Respuesta $\int_{0}^{2}\int_{-y}^{y-y^2} dxdy = \frac{4}{3}$

10. Hallar el área de la región limitada por los gráficos de $x = -y^2$, $y = x + 2$ Respuesta $\int_{-2}^{1}\int_{y-2}^{-y^2} dxdy = \frac{9}{2}$

11. Hallar el área de la región limitada por los gráficos de $y = 0$, $y = (x-1)^2$, $y = (x+1)^2$ Respuesta $\int_{0}^{1}\int_{-1+\sqrt{y}}^{1-\sqrt{y}} dxdy$

12. Hallar el área de la región limitada por el gráfico de $x^2 + (y-1)^2 = 1$, Respuesta $\int_{-1}^{1}\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}} dydx = \int_{0}^{2}\int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}} dxdy$

13. Hallar el área de la región limitada por los gráficos de $x = y^2$, $y - x = 3$, $y = -3$, $y = 2$ Respuesta $\int_{-3}^{2}\int_{y-3}^{y^2} dxdy = \frac{175}{6}$

14. Hallar el área de la región limitada por los gráficos de $x + 2y = 2$, $y = \dfrac{x}{2}$, $x = 0$. Respuesta $\int_{0}^{1}\int_{\frac{x}{2}}^{1-\frac{x}{2}} dydx = \frac{1}{2}$

15. Hallar el área de la región limitada por los gráficos de $y = 6 - x^2$, $y = 3 - 2x$ Respuesta $\int_{-1}^{3}\int_{3-2x}^{6-x^2} dydx = \frac{32}{3}$

16. Hallar el área de la región limitada por los gráficos de $y - x = 6$, $y = x^3$, $2y + x = 0$ Respuesta $\int_{-4}^{0}\int_{-\frac{x}{2}}^{x+6} dydx + \int_{0}^{2}\int_{x^3}^{x+6} dydx = 22$

17. Hallar el área de la región limitada por los gráficos de $r = \frac{3}{2}$ y a la dercha de la

recta $4r\cos\theta = 3$ Respuesta $\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \int\limits_{\frac{3}{4*\cos\theta}}^{\frac{3}{2}} r dr d\theta$

18. Hallar el área de la región limitada por los gráficos de interior a la cardioide $r = 1 + cos\theta$ y exterior a $r = 1$ Respuesta $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_{1}^{1+\cos\theta} r dr d\theta = \frac{1}{4}\pi + 2$

19. Hallar el área de la región limitada por los gráficos de interior a la cardioide $r = 3\cos\theta$ y exterior a $r = 1 + \cos\theta$ Respuesta $\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \int\limits_{1+\cos\theta}^{3\cos\theta} r dr d\theta = \pi$

20. Hallar el área interior a $r = cos\theta + \sin\theta$ y exterior a $r = 1$ Respuesta $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_{1}^{\cos\theta+\sin\theta} r dr d\theta = \frac{1}{2}$

21. Hallar el área interior a $r = 2\sin 2\theta$ y exterior a $r = 1$ Respuesta $\int\limits_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} \int\limits_{1}^{2\sin 2\theta} 4 r dr d\theta$

22. Hallar el área interior a $r = 2\cos 2\theta$ y exterior a $r = 1$ Respuesta $\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \int\limits_{1}^{2\cos 2\theta} 4 r dr d\theta$

23. Hallar el área interior a $r^2 = 2\sin 2\theta$ y exterior a $r = 1$ Respuesta $\int\limits_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} \int\limits_{1}^{\sqrt{2\sin 2\theta}} 2 r dr d\theta$

6.2 Volúmenes.

Recordemos que si $f(x,y) - g(x,y) \geq 0$ entonces

$$V(S) = \iint\limits_{Q} \left(f(x,y) - g(x,y)\right) dxdy = \iint\limits_{Q} \left(\int\limits_{g(x,y)}^{f(x,y)} dz\right) dxdy = \iiint\limits_{S} dzdxdy.$$

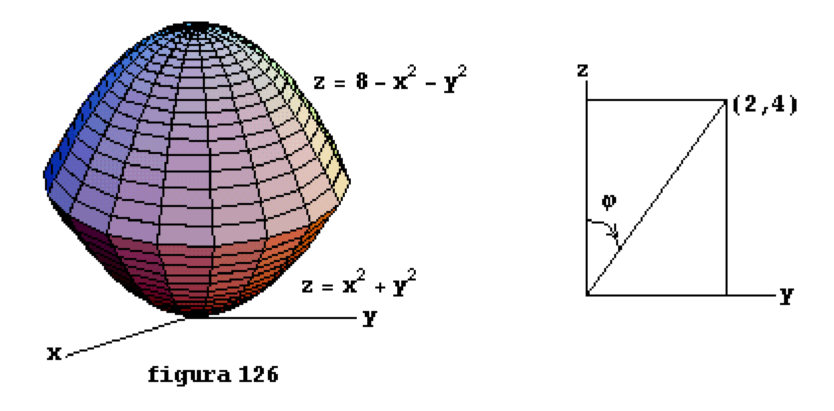


figura 126

Ejemplo 6.16 *Hallar el volumen del sólido limitado por el gráfico de* $z = 8 - x^2 - y^2$, $z = x^2 + y^2$ *fig126*

Igualando las ecuaciones tenemos que $x^2+y^2 = 4$ es su interseccion, pues $8-x^2-y^2 = x^2+y^2$ luego $x^2+y^2 = 4$ de $z = x^2+y^2$ entonces $r\cos\varphi = r^2\sin^2\varphi$ y de aquí $r = cos\varphi/\sin^2\varphi$. De $z = 8-x^2-y^2$ entonces $rcos\varphi = 8-\left(r^2\cos^2\theta\sin^2\varphi + r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi\right)$ $= 8 - r^2\sin^2\varphi$ luego $r^2\sin^2\varphi + rcos\varphi - 8 = 0$ y despejando r, obtenemos

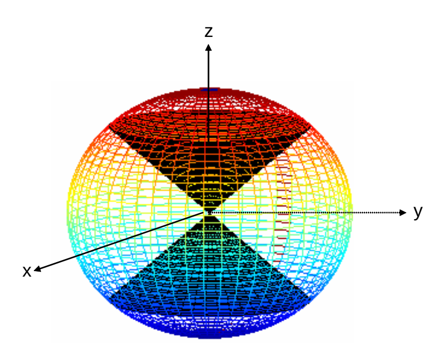
$$r = \left(-\cos\varphi + \sqrt{\cos^2\varphi + 32\sin^2\varphi}\right)/2\sin^2\varphi = f(\varphi)$$

luego

$$V(S) = \iiint\limits_S dzdxdy = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{8-x^2-y^2} dzdydx = \int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_{r^2}^{8-r^2} rdzdrd\theta = 16\pi =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\arctan 1/2}\int_0^{f(\varphi)} r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta + \int_0^{2\pi}\int_{\arctan 1/2}^{\pi/2}\int_0^{\cos\varphi/\sin^2\varphi} r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$$

Ejemplo 6.17 *Hallar el volúmen del sólido limitado por el gráfico de* $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z^2 = x^2 + y^2$ *interior al cono fig127*



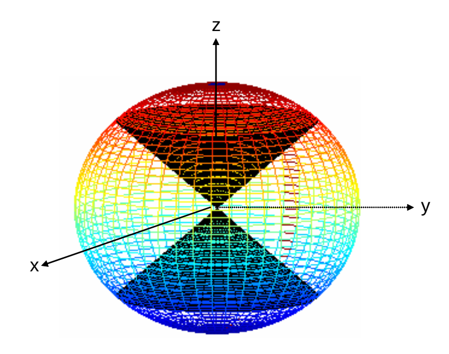
igualando las dos ecuaciones se tiene $x^2+y^2+z^2=z^2+z^2=2z^2=4$, luego $z=\pm\sqrt{2}$ entonces $x^2+y^2=2$ es la curva de intersección. $\tan\varphi=\sqrt{2}/\sqrt{2}=1$, entonces $\varphi=arc\tan 1=\pi/4$ y así

$$V(S)=\iiint\limits_S dzdxdy=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dzdydx+\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}}\int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{-\sqrt{x^2+y^2}} dzdydx=$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\int_r^{\sqrt{4-r^2}} rdzdrd\theta+\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{4-r^2}}^{-r} rdzdrd\theta=-\frac{16}{3}\pi\sqrt{2}+\frac{32}{3}\pi=$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_0^{\pi/4} r^2\sin\varphi d\varphi drd\theta+=\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_{3\pi/4}^{\pi} r^2\sin\varphi d\varphi drd\theta.$$

Ejemplo 6.18 *Hallar el volúmen del sólido limitado por el gráfico de* $x^2+y^2+z^2=4$, $z^2=x^2+y^2$ *fuera del cono fig128*



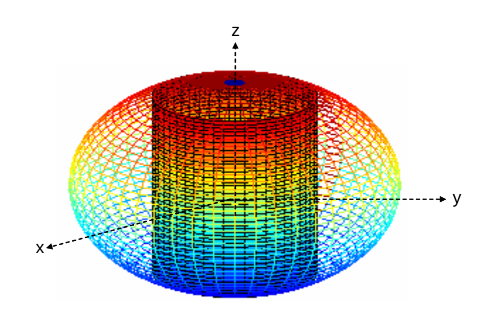
igualando las dos ecuaciones se tiene $x^2+y^2+z^2=z^2+z^2=2z^2=4$, luego $z=\pm\sqrt{2}$ entonces $x^2+y^2=2$ es la curva de intersección. Si $x^2+y^2=2$ entonces $r^2\sin^2\varphi=2$ luego $r=\sqrt{2}/\sin\varphi$

$$V(S)=\iiint_S dzdxdy=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}}\int_{-\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{x^2+y^2}}dzdydx+\int_{-2}^{-\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}}dzdydx+$$

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{2-x^2}}\int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}}dzdydx+\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\int_{\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}}dzdydx+\int_{-\sqrt{2}}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}}dzdydx=$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\int_{-r}^{r}rdzdrd\theta+\int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{2}}^{2}\int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}}rdzdrd\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_{\pi/4}^{3\pi/4}r^2\sin\varphi d\varphi drd\theta=\frac{16}{3}\pi\sqrt{2}$$

Ejemplo 6.19 *Hallar el volúmen del sólido limitado por el gráfico de* $x^2+y^2+z^2=16$, $4=x^2+y^2$ *interior al cilindro*

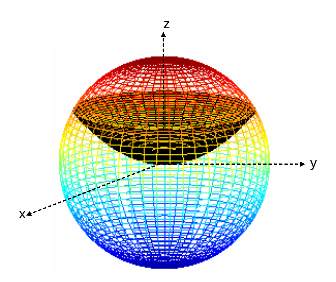


$x^2+y^2+z^2=4+z^2=16$ entonces $z=\pm\sqrt{12}$. $\tan\varphi=2/\sqrt{12}=1/\sqrt{3}$, luego $\varphi=\pi/6$ así

$$V(S)=\iiint_S dzdxdy=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{-\sqrt{16-x^2-y^2}}^{\sqrt{16-x^2-y^2}}dzdydx=\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_{-\sqrt{16-r^2}}^{\sqrt{16-r^2}}rdzdrd\theta=$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/6}\int_0^{4}r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta+\int_0^{2\pi}\int_{\pi/6}^{5\pi/6}\int_0^{2/\sin\varphi}r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta+\int_0^{2\pi}\int_{5\pi/6}^{\pi}\int_0^{4}r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$$

Ejemplo 6.20 *Hallar el volúmen del sólido limitado por el gráfico de* $x^2+y^2+z^2=8$, y $2z=x^2+y^2$ *(interior al paraboloide) fig130*



Solución La curva de intrsecciòn es $x^2+y^2=4$, en el plano $z=2$, pues $x^2+y^2+z^2=2z+z^2=8$, es decir, $z^2+2z-8=(z+4)(z-2)=0$, de donde $z=2$ por lo tanto

$$V(S)=\iiint\limits_S dzdxdy=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{(x^2+y^2)/2}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} dzdydx=\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_{r^2/2}^{\sqrt{8-r^2}} rdzdrd\theta=$$

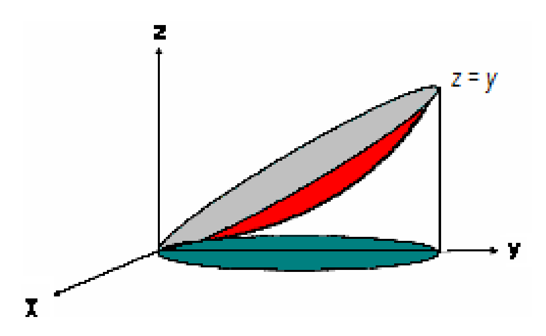
$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{8}}\int_0^{\pi/4} r^2\sin\varphi d\varphi drd\theta+\int_0^{2\pi}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^{(2\cos\varphi)/\sin^2\varphi} r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta=-\frac{28}{3}\pi+\frac{32}{3}\pi\sqrt{2}=$$

Ejemplo 6.21 *Hallar el volúmen del sólido limitado por el gráfico de* $(x^2+y^2+z^2)^2=z(x^2+y^2)$

Solución La ecuación de la superficie en coordenadas esfèricas es $r=cos\varphi\sin^2\varphi$ y como θ no aparece toma el máximo valor, es dcir, $0\le\theta\le2\pi$, y $0\le\varphi\le\pi/2$ ya que $z\ge0$ y así

$$V(S)=\iiint\limits_S dzdxdy=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{(\cos\varphi)\sin^2\varphi} r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta=\frac{1}{60}\pi$$

Ejemplo 6.22 *Hallar el volúmen del sólido limitado superiormente por por el gráfico de* $z=y$ *e inferiormente por* $z=x^2+y^2$ *fig 131*



Solución Como $z = y$ y $z = x^2 + y^2$ entonces la curva de intersección es $y = x^2 + y^2$ luego

$$V(S) = \iiint_S dzdxdy = \int_0^{\pi}\int_0^{\sin\theta}\int_{r^2}^{r\sin\theta} rdzdrd\theta = \frac{1}{32}\pi = \int_0^{\pi}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^{(\cos\varphi)/\sin^2\varphi} r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$$

Ejemplo 6.23 *Hallar el volúmen del sólido que esá dentro de* $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ *y dentro del cilindro* $4x = x^2 + y^2$

Solución

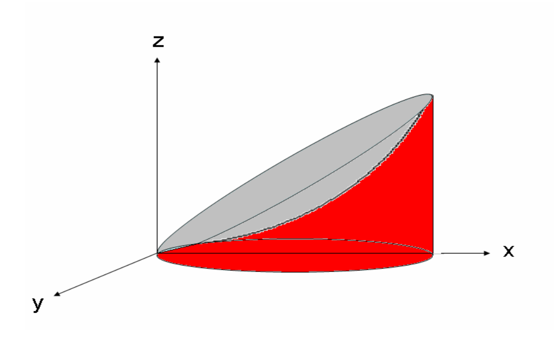
$$V(S) = \iiint_S dzdxdy = \int_0^4 \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} \int_{-\sqrt{16-x^2-y^2}}^{\sqrt{16-x^2-y^2}} dzdydx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{4\cos\theta}\int_{-\sqrt{16-r^2}}^{\sqrt{16-r^2}} rdzdrd\theta$$

$$= \frac{128}{3}\pi - \frac{512}{9} = 2\int_0^{\pi/2}\int_0^{4\cos\theta}\int_{-\sqrt{16-r^2}}^{\sqrt{16-r^2}} rdzdrd\theta =$$

$$= 4\left[\int_0^{\pi/2}\int_{\sin^{-1}(\cos\theta)}^{\pi/2}\int_0^{(4\cos\theta)/\sin\varphi} r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta + \int_0^{\pi/2}\int_0^{\sin^{-1}(\cos\theta)}\int_0^4 r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta\right]$$

Ejemplo 6.24

Hallar el volúmen del sólido limitado por el gráfico de $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 2z$, $z = 0$.



Solución

$$V(S)=\iiint\limits_S dzdxdy=\int_0^2\int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}}\int_0^{(x^2+y^2)/2}dzdydx=\frac{3}{4}\pi=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta}\int_0^{r^2/2}rdzdrd\theta=\frac{3}{4}\pi$$

Ejemplo 6.25 *Hallar el volúmen del sólido limitado por el gráfico de* $z=16-\sqrt{x^2+y^2}$ *y* $z=7$ *fig134*

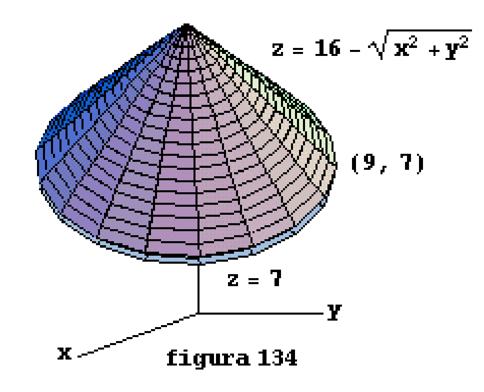


figura 134

Solución Como $z=16-\sqrt{x^2+y^2}$ y $z=7$ entonces $7=16-\sqrt{x^2+y^2}$ y así $x^2+y^2=81$ es la curva de intersección luego

$$V(S)=\iiint\limits_S dzdxdy=\int_{-9}^{9}\int_{-\sqrt{81-x^2}}^{\sqrt{81-x^2}}\int_7^{16-\sqrt{x^2+y^2}}dzdydx=\int_0^{2\pi}\int_0^9\int_7^{16-r}rdzdrd\theta=243\pi=$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\arctan(9/7)}\int_{7/\cos\varphi}^{16/(\cos\varphi+\sin\varphi)}r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$$

La ecuación $z = 16 - \sqrt{x^2+y^2}$ en esféricas es $r = 16/(cos\varphi + \sin\varphi)$

Ejemplo 6.26 *Hallar el volúmen del sólido limitado por el gráfico de* $x^2 + y^2 = R^2$ *y* $x^2 + z^2 = R^2$ *Solución*

$$V(S) = \iiint_S dzdxdy = \int_{-R}^{R} \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dzdydx = \frac{16}{3}R^3$$

Ejemplo 6.27 *Hallar el volúmen del sólido limitado por el gráfico de* $x^2 + y^2 = 1$ *(exterior a* $x^2 + y^2 = 1$*),* $x^2 + y^2 = 4$ *, (interior a* $x^2 + y^2 = 4$*),* $z = 0$ *y* $z = 4$ *fig136*

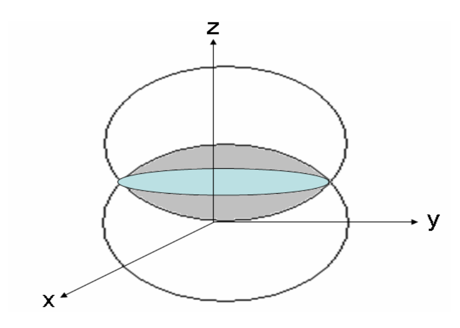
Solución

$$V(S) = \iiint_S dzdxdy = \int_{-2}^{-1} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^4 dzdydx + \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} \int_0^4 dzdydx +$$

$$+ \int_{-1}^{1} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^4 dzdydx + \int_{1}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^4 dzdydx =$$

$$\int_0^{2\pi} \int_1^2 \int_0^4 rdzdrd\theta = 12\pi = \int_0^{2\pi} \int_{\arctan\frac{1}{4}}^{\arctan 1/2} \int_{\frac{1}{\sin\varphi}}^{4/\cos\varphi} r^2 \sin\varphi drd\varphi d\theta + \int_0^{2\pi} \int_{\arctan 1/2}^{\pi/2} \int_{1/\sin\varphi}^{2/\sin\varphi} r^2 \sin\varphi drd\varphi d\theta$$

Ejemplo 6.28 *Hallar el volúmen del sólido limitado por el gráfico* $r = 2$ *y* $r = 2\sqrt{2}cos\varphi$ *(común) fig137*



Solución Como $r=2$ y $r=2\sqrt{2}cos\varphi$ entonces $2\sqrt{2}cos\varphi=2$ y de aquí $\varphi=\pi/4$. Las ecuaciones $r=2$ y $r=2\sqrt{2}cos\varphi$ equivalen a

$$x^2+y^2+z^2=4 \quad y \quad x^2+y^2+(z-\sqrt{2})^2=2$$

en coordenadas cartesianas, luego

$$V(S)=\iiint_S dzdxdy=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{2} r^2\sin\varphi dr d\varphi d\theta+\int_0^{2\pi}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^{2\sqrt{2}\cos\varphi} r^2\sin\varphi dr d\varphi d\theta=$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\int_{\sqrt{2}-\sqrt{2-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} rdzdrd\theta=-2\pi\sqrt{2}+\frac{16}{3}\pi$$

Ejercicio 16

1. Hallar el volúmen del sólido que está entre los cilindros $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$, $z=0$ y $z=x+2$ Respuesta $\int_0^{2\pi}\int_1^{2}\int_0^{r\cos\theta+2} rdzdrd\theta=6\pi$

2. Hallar el volúmen del sólido limitado por el gráfico de las superficies $x^2+y^2+z^2=2z$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$ Respuesta $\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{2\cos\varphi} r^2\sin\varphi dr d\varphi d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{1}\int_r^{1+\sqrt{1-r^2}} rdzdrd\theta=\pi$

3. Hallar el volúmen del sólido limitado por el gráfico de las superficies $x^2+y^2=1$, $4x^2+4y^2=z^2$ Respuesta $\int_0^{2\pi}\int_0^{1}\int_{-2r}^{2r} rdzdrd\theta=\frac{8}{3}\pi$

4. Hallar el volumen del sólido limitado por el gráfico de las superficies $x^2+y^2=1$, $z=-\sqrt{x^2+y^2}$, $z=0$ Respuesta $\int_0^{2\pi}\int_0^{1}\int_{-r}^{0} rdzdrd\theta=\frac{2}{3}\pi$

5. Hallar el volúmen del sólido limitado por el gráfico de las superficies $x^2+y^2=1$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=0$ Respuesta $\int_0^{2\pi}\int_0^{1}\int_0^{r} rdzdrd\theta=\frac{2}{3}\pi$

6. Hallar el volúmen del sólido limitado por el gráfico de las superficies $x^2+y^2=1,$, $z=0, z=y$, $y\geq 0$ Respuesta $\int_0^{\pi}\int_0^{1}\int_0^{r\sin\theta} rdzdrd\theta=\frac{2}{3}$

7. Hallar el volúmen del sólido limitado por el gráfico de las superficies $x^2 + y^2 = z$, $z = 1, z = 4$ Respuesta $\int_0^{2\pi}\int_1^2\int_{r^2}^4 rdzdrd\theta + \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_1^4 rdzdrd\theta$

8. Hallar el volúmen del sólido interior a $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y exterior $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ Respuesta $\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\int_{-\sqrt{4-r^2}}^{2-\sqrt{4-r^2}} rdzdrd\theta + \int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{3}}^2\int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} rdzdrd\theta = \frac{22}{3}\pi$

9. Hallar el volúmen del sólido interior a $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ y exterior $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ Respuesta $\int_0^{2\pi}\int_0^{\arctan\sqrt{3}}\int_2^{4\cos\varphi} r^2 \sin\varphi drd\varphi d\theta = \pi\left(\frac{8}{3}\sqrt{3} - \frac{2}{3}\right)$

10. Hallar el volúmen del sólido limitado por el gráfico de las superficies $z^2 = 4 + r^2$ y la hoja superior del cono $z^2 = 2r^2$ Respuesta $\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{\sqrt{2}r}^{\sqrt{4+r^2}} rdzdrd\theta = \pi\left(\frac{16}{3}\sqrt{2} - \frac{16}{3}\right)$

11. Hallar el volúmen del sólido limitado por el gráfico de las superficies $r^2 + z^2 = a^2$ dentro del cilindro $r = acos\theta$ Respuesta $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a\cos\theta}\int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} 2rdzdrd\theta = \left(\frac{2}{3}a^3\right)(\pi - 4/3)$

12. Dibujar el sólido cuyo volúmen viene dado por $\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{4-r^2} rdzdrd\theta$

13. Dibujar el sólido cuyo volúmen viene dado por $\int_1^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_r^3 rdzd\theta dr$

14. Dibujar el sólido cuyo volúmen viene dado por $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r^2 \sin\varphi drd\theta d\varphi$

15. Dibujar el sólido cuyo volúmen viene dado por $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_0^{2\pi}\int_0^{\sec\varphi} r^2 \sin\varphi drd\theta d\varphi$

16. Dibujar el sólido cuyo volúmen viene dado por $\int_0^2\int_0^{4-2y}\int_0^{4-2y-x} dzdxdy$

17. Dibujar el sólido cuyo volúmen viene dado por $\int_0^1\int_0^{1-x^2}\int_0^{2-x} dydzdx$

18. Dibujar el sólido cuyo volúmen viene dado por $\int_0^1 \int_x^{\sqrt{2-x^2}} \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} dzdydx$

19. Dibujar el sólido cuyo volúmen viene dado por $\int_0^{\sqrt{2}} \int_y^{\sqrt{4-y^2}} \int_0^2 dzdxdy$

20. Mostrar que el volúmen del sólido limitado por el gráfico de $(x^2+y^2+z^2)^2 = x^2+y^2$ viene dado por $V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\sin\varphi} r^2 \sin\varphi drd\varphi d\theta = \frac{1}{4}\pi^2$.

21. Mostrar que el centroide del sólido limitado por el gráfico $(x^2+y^2+z^2)^2 = z$ viene dado por $(0,0,7/16)$.

22. Hallar el volumen del sólido limitado por $z = x^2+y^2$, $z = 2x^2+2y^2$, $xy = 1$, $xy = 4$, $y = x, y = 5x$. ind $u = z/(x^2+y^2)$, $v = xy$, $w = y/x$ (primer octante)

23. Hallar el volúmen del sólido limitado por $x+y+z = 1$, $x+y+z = 4$, $2x+3y+5z = 3$, $2x+3y+5z = 5$, $4x+6y+5z = 1$, $4x+6y+5z = 10$

24. Mostrar que el volúmen del sólido limitado por el gráfico de $(x+y+z)^4 = xyz$ en el primer octante viene dado por $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{(\cos^2\theta \sin^2\theta \cos^2\varphi \sin^4\varphi)} 4r^2(\sin^3\varphi \cos\theta \sin\theta \cos\varphi)\, drd\varphi d\theta = \frac{1}{554\,400}$ $(x = rcos^2\theta \sin^2\varphi....)$

6.3 Centro de masa, centroide y momentos

Sabemos que si Q es una región del plano su masa viene dada por $m(Q) = D \cdot A$ (densidad por área)

y si Q es un sólido $m(Q) = D \cdot V$ (densidad por volúmen) luego

$$m(Q) = \iint_Q \rho(x,y)dxdy$$

si $\rho(x,y)$ es la densidad en cualquier punto de Q y

$$m(S) = \iiint_S \rho(x,y,z)dzdydx$$

si $\rho(x,y,z)$ es la densidad en cualquier punto del sólido

Las coordenadas del centro de masa y los momentos vienen dadas por :

$$\overline{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{m}\iint_D x\rho(x,y)dxdy \qquad \overline{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{m}\iint_D y\rho(x,y)dxdy$$

$$I_x = \iint\limits_Q y^2\rho(x,y)dxdy\ , \quad I_y = \iint\limits_Q x^2\rho(x,y)dxdy\ , \quad I_0 = \iint\limits_Q \left(x^2+y^2\right)\rho(x,y)dxdy = I_x + I_y$$

Las coordenadas del centroide vienen dadas por :

$$\overline{x} = \frac{1}{A}\iint\limits_Q xdxdy \qquad \overline{y} = \frac{1}{A}\iint\limits_Q ydxdy \qquad A = \iint\limits_Q dxdy$$

Las coordenadas del centro de masa y los momentos para un sólido S vienen dadas por:

$$\overline{x} = \frac{1}{m}\iiint\limits_S x\rho(x,y,z)dzdxdy \quad \bar{y} = \frac{1}{m}\iiint\limits_S y\rho(x,y,z)dzdxdy \quad \overline{z} = \frac{1}{m}\iiint\limits_S z\rho(x,y,z)dzdxdy$$

$$I_x = \iiint\limits_S (y^2+z^2)\rho(x,y,z)dzdydx \qquad I_y = \iiint\limits_S (x^2+z^2)\rho(x,y,z)dzdydx$$

$$I_z = \iiint\limits_S (x^2+y^2)\rho(x,y,z)dzdydx$$

Las coordenadas del centroide del sólido S vienen dadas por :

$$\overline{x} = \frac{1}{V}\iiint\limits_S xdzdxdy \qquad \overline{y} = \frac{1}{V}\iiint\limits_S ydzdxdy \qquad \overline{z} = \frac{1}{V}\iiint\limits_S zdzdxdy$$

V (volúmen del sólido)

Ejemplo 6.29 *Hallar las coordenadas del centroide de la región limitada por el gráfico* $x^2+y^2=4$, $x \geq 0$, $\quad y \geq 0$ *fig 138*

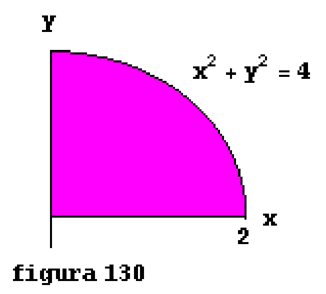


figura 130

Solución

$$A=\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}dydx=\pi=\int_0^{\pi/2}\int_0^2 rdrd\theta=\pi$$

$$\overline{x}=\frac{\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}xdydx}{\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}dydx}=\frac{8}{3\pi}\quad \text{y}\quad \overline{y}=\frac{\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}ydydx}{\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}dydx}=\frac{8}{3\pi}$$

$$I_x=\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}y^2dydx=\int_0^2\int_0^{\pi/2}r^3\sin^2\theta drd\theta$$

Ejemplo 6.30 *Hallar el centro de masa la región Q limitada por el gráfico* $y=2-x^2$, $y=x$ *fig 141, si* $\rho(x,y)=x^2$

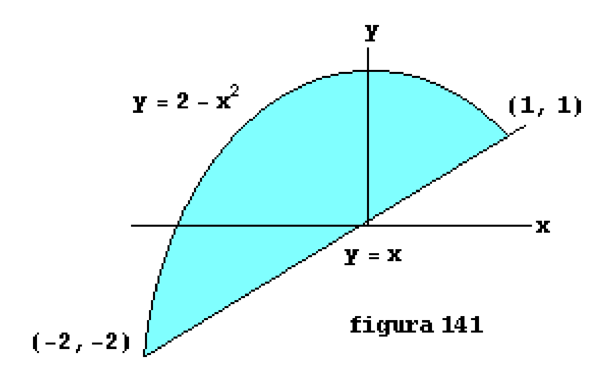


figura 141

Solución Los puntos de intersección de las curvas son $(-2,-2),(1,1)$ y así

$$M_x=\iint_Q yx^2dxdy=\int_{-2}^1\int_x^{2-x^2}yx^2dydx=-\frac{9}{7}$$

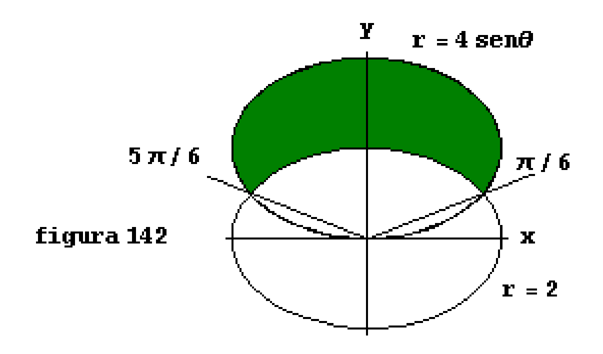
$$M_y=\iint_Q xx^2dxdy=\int_{-2}^1\int_x^{2-x^2}x^3dydx=-\frac{18}{5}$$

$$m=\iint_Q x^2dxdy=\int_{-2}^1\int_x^{2-x^2}x^2dydx=\frac{63}{20}$$

luego

$$\overline{x} = \frac{\frac{-18}{5}}{\frac{63}{20}} = \frac{-8}{7}\ ,\ \overline{y} = \frac{-20}{49}$$

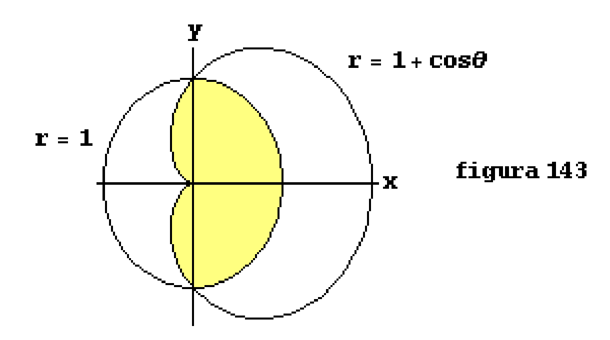
Ejemplo 6.31 *Hallar la masa de la región que está fuera del gráfico de* $r = 2$ *y dentro de* $r = 4\sin\theta$, *si su densidad es r fig 142*



Solución Las curvas se cortan en $\pi/6$, $5\pi/6$ luego

$$m = \iint\limits_{Q} \rho(x,y)dxdy = \iint\limits_{Q_1} r.rdrd\theta = \int\limits_{\pi/6}^{5\pi/6}\int\limits_{2}^{4\sin\theta} r^2 drd\theta = -\frac{16}{9}\pi + 16\sqrt{3}$$

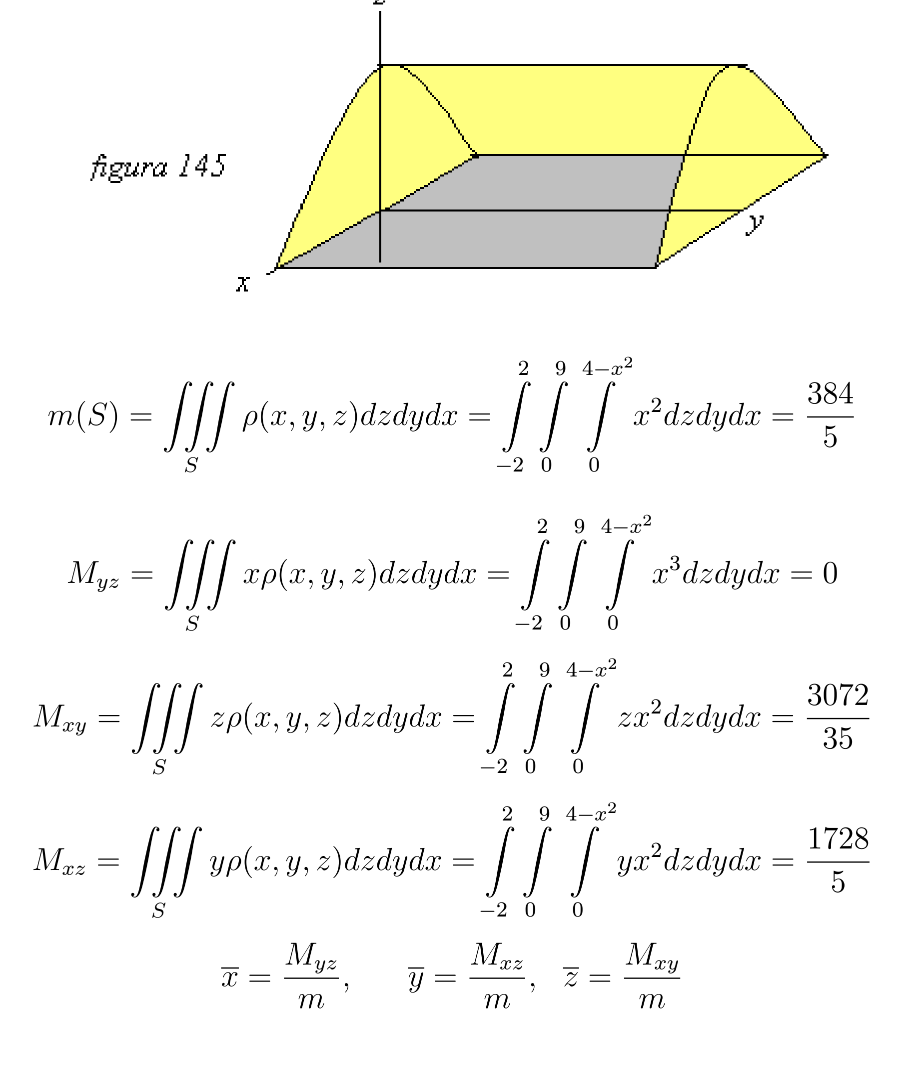
Ejemplo 6.32 *Hallar* M_y *para la región interior del gráfico de* $r = 1$ *y dentro de* $r = 1 + \cos\theta$ *si* $\rho(r,\theta) = r$



Solución Las curvas se cortan en $\pi/2$, $3\pi/2$ luego

$$\begin{aligned} M_y &= \iint_Q x\rho(x,y)dxdy = \iint_{Q_1} (r\cos\theta).rdrd\theta = \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^1 r^3\cos\theta drd\theta + \int_{\pi/2}^{3\pi/2}\int_0^{1+\cos\theta} r^3\cos\theta drd\theta = \frac{157}{30} + \frac{7}{8}\pi \end{aligned}$$

Ejemplo 6.33 *Hallar la masa, las coordenadas del centro de masa, I_x, de la región limitada por los gráficos de $z = 4 - x^2$, $y = 0$ $y = 9$, $z = 0$ y $\rho(x,y,z) = x^2$ fig145*



$$m(S) = \iiint_S \rho(x,y,z)dzdydx = \int_{-2}^{2}\int_0^9\int_0^{4-x^2} x^2 dzdydx = \frac{384}{5}$$

$$M_{yz} = \iiint_S x\rho(x,y,z)dzdydx = \int_{-2}^{2}\int_0^9\int_0^{4-x^2} x^3 dzdydx = 0$$

$$M_{xy} = \iiint_S z\rho(x,y,z)dzdydx = \int_{-2}^{2}\int_0^9\int_0^{4-x^2} zx^2 dzdydx = \frac{3072}{35}$$

$$M_{xz} = \iiint_S y\rho(x,y,z)dzdydx = \int_{-2}^{2}\int_0^9\int_0^{4-x^2} yx^2 dzdydx = \frac{1728}{5}$$

$$\overline{x} = \frac{M_{yz}}{m}, \qquad \overline{y} = \frac{M_{xz}}{m}, \quad \overline{z} = \frac{M_{xy}}{m}$$

$$I_x = \iiint\limits_S \left(y^2+z^2\right)\rho(x,y,z)dzdydx = \int_{-2}^{2}\int_{0}^{9}\int_{0}^{4-x^2}(y^2+z^2)x^2dzdydx = \frac{234\,112}{105}.$$

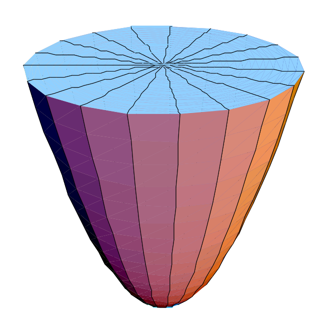
Ejemplo 6.34 *Hallar la masa del sólido limitado por los gráficos* $z=\sqrt{x^2+y^2}$ *y* $z=x^2+y^2$ *si* $\rho(x,y)=2+xy$

Solución si $z=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{z}$, entonces $z^2-z=0$ y $z=0$, $z=1$ luego $x^2+y^2=1$ luego

$$m(S)=\iiint\limits_S \rho(x,y,z)dzdydx = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}}(2+xy)\,dzdydx =$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2}^{r}\left(2+r^2\cos\theta\sin\theta\right)rdzdrd\theta=\frac{1}{3}\pi$$

Ejemplo 6.35 *Hallar las coordenadas del centroide del sólido limitad por los gráficos* $z=x^2+y^2$ *y* $z=1$



$$V=\iiint\limits_S dzdydx=\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{1}dzdydx=\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2}^{1}rdzdrd\theta=\frac{1}{2}\pi.$$

$$M_{xy}=\iiint\limits_S z\rho(x,y,z)dzdydx=\iiint\limits_S zdzdydx=\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2}^{1}zrdzdrd\theta=\frac{1}{3}\pi$$

luego

$$\overline{z} = \frac{M_{xy}}{m} = 2/3$$

$$\overline{x} = \frac{\iiint\limits_S xdzdydx}{\pi/2} = \frac{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1\int\limits_{r^2}^1 (r\cos\theta)\, rdzdrd\theta}{\pi/2} = 0$$

$$\overline{y} = \frac{\iiint\limits_S ydzdydx}{\pi/2} = \frac{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1\int\limits_{r^2}^1 (r\sin\theta)\, rdzdrd\theta}{\pi/2} = 0$$

Ejercicio 17

1. Considere el sólido limitado por los gráficos de las superficies $x^2 + z = 4, x + z = 2,$ y $y = 0$, $y = 3$ muestre que

$$V = \int\limits_0^3\int\limits_{-1}^2\int\limits_{2-x}^{4-x^2} dzdxdy = \frac{27}{2}$$

$$M_{yz} = \int\limits_0^3\int\limits_{-1}^2\int\limits_{2-x}^{4-x^2} xdzdxdy = \frac{27}{4}$$

$$M_{xy} = \int\limits_0^3\int\limits_{-1}^2\int\limits_{2-x}^{4-x^2} zdzdxdy = \frac{162}{5}$$

$$M_{xz} = \int\limits_0^3\int\limits_{-1}^2\int\limits_{2-x}^{4-x^2} ydzdxdy = \frac{81}{4}$$

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{M_{yz}}{V}, \frac{M_{xz}}{V}, \frac{M_{xy}}{V}\right) = \left(\frac{\frac{27}{4}}{\frac{27}{2}}, \frac{\frac{81}{4}}{\frac{27}{2}}, \frac{\frac{162}{5}}{\frac{27}{2}}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{12}{5} :\right)$$

2. Considere el sólido limitado por los gráficos de las superficies $y^2 = x, x = z,$ y $x = 1$, $z = 0$, $\rho(x, y) = x$, muestre que

$$m = \int\limits_{-1}^1\int\limits_{y^2}^1\int\limits_0^x xdzdxdy = \frac{4}{7}$$

$$M_{yz} = \int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1}\int_{0}^{x} x x dz dx dy = \int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1}\int_{0}^{x} x^2 dz dx dy = \frac{4}{9}$$

$$M_{xy} = \int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1}\int_{0}^{x} z x dz dx dy = \int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1}\int_{0}^{x} z x dz dx dy = \frac{2}{9}$$

$$M_{xz} = \int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1}\int_{0}^{x} y x dz dx dy = \int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1}\int_{0}^{x} y x dz dx dy = 0$$

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{M_{yz}}{m}, \frac{M_{xz}}{m}, \frac{M_{xy}}{m}\right) = \left(\frac{\frac{4}{9}}{\frac{4}{7}}, \frac{0}{\frac{4}{7}}, \frac{\frac{2}{9}}{\frac{4}{7}}\right) = \left(\frac{7}{9}, 0, \frac{7}{18}\right)$$

$$I_x = \int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1}\int_{0}^{x} (y^2 + z^2) x dz dx dy = \frac{80}{297}$$

$$I_y = \int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1}\int_{0}^{x} (x^2 + z^2) x dz dx dy = \frac{16}{33}$$

$$I_z = \int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1}\int_{0}^{x} (y^2 + x^2) x dz dx dy = \frac{152}{297}$$

3. Sea Q la lámina limitada por las gráficas de $y = x^2, y = 4, \rho(x, y) = x + y$ entonces mostrar que

$$m = \int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4} (x + y)\, dy dx = \frac{128}{5}$$

$$M_y = \int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4} x\,(x + y)\, dy dx = \frac{128}{15}$$

$$M_x = \int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4} y\,(x + y)\, dy dx = \frac{512}{7}$$

$$I_x = \int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4} y^2\,(x + y)\, dy dx = \frac{2048}{9}$$

$$I_y = \int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4} x^2\,(x + y)\, dy dx = \frac{512}{21}$$

$$I_0 = I_x + I_y = \frac{2048}{9} + \frac{512}{21} = \frac{15\,872}{63}$$

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{M_y}{m}, \frac{M_x}{m}\right) = \left(\frac{\frac{128}{15}}{\frac{128}{5}}, \frac{\frac{512}{7}}{\frac{128}{5}}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{20}{7}\right)$$

4. Considere el sólido limitado por las superficies $z = 4 - x^2 - y^2$ y $z = 0$, Mostrar que las coordenadas del centroide son

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{M_{yz}}{V}, \frac{M_{xz}}{V}, \frac{M_{xy}}{V} \right) = \left(0, 0, \frac{4}{3} \right)$$

5. Considere el sólido interior a $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ y bajo $z = 1$, considere $\rho(x, y, z) = y$ hallar las coordenadas del centro de masa y los momentos alrededor de los tres ejes coordenados

6. Considere el sólido interior a $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ y superior a $z = 1$, considere $\rho(x, y, z) = y$ hallar las coordenadas del centro de masa y los momentos alrededor de los tres ejes coordenados

7. Hallar las coordenadas del centroide de la región limitada por $r = 1 + \cos\theta$ (5/6) ,hallar I_x

8. Hallar las coordenadas del centroide de la región limitada por $x = y^2$, $-8y = x^2$ $(9/5, -9/10)$

9. Hallar las coordenadas del centroide de la región limitada por $r = 2\cos\theta$

10. Hallar las coordenadas del centroide de la región limitada por $r = \frac{6}{1+\cos\theta}$ primer cuadrante (6/5,9/4)

11. Hallar las coordenadas del centroide de la región limitada por $r = 2\cos\theta, z = r^2, z = 0$

12. Hallar las coordenadas del centroide de la región limitada por $z = \sqrt{4 - r^2}, z = 1$

13. Hallar las coordenadas del centroide de la región que está fuera del gráfico de $r = 2$ y dentro de $r = 4\sin\theta$

Capítulo 7

Integrales de linea.

7.1 Introducción

En este capítulo se hará un tratado completo de lo que es una curva, parametrizaciones de algunas curvas, la integral de linea de un campo escalar, la integral de linea de un campo vectorial y el teorema de Green. La noción de integración de una función definida en un intervalo cerrado $[a,b] \subseteq R$ se puede generalizar a la integración de una función definida en una curva y por este motivo conoceremos algunas caracteristicas de las curvas

.Sea $\alpha : [a,b] \longmapsto \mathrm{R}^n$, una funcion vectorial talque $\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$ entonces

1. Al conjunto $\{(t, \alpha(t) \ / \ t \in [a,b] \ )\}$ se llama, la gráfica de α
2. Si α es una función continua en $[a,b]$, la imagen de α se llama curva y $a \ \ \alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$ una representación paramétrica y su gráfico (el de la imagen) se representará por C
3. Si $\alpha'(t)$ existe para todo $t \in (a,b)$ y si $\alpha(t)$ es continua en $[a,b]$ entonces la curva se llama regular
4. La curva se llama regular a trozos (suave o liza), si se puede expresar como la union de un número finito de curvas regulares
5. La curva es cerrada si $\alpha(a) = \alpha(b)$
6. La curva es cerrada simple si $\alpha(a) = \alpha(b)$ y si para todo t_1, $t_2 \in [a,b] \quad t_1 \neq t_2$ se tiene que $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$
7. El sentido positivo de la curva, es el correspondiente a los valores crecientes de t

Ejemplo 7.1 *Sea* $\alpha : [0,4] \longmapsto R^2$ *talque* $\alpha(t) = (t, t^2) = (x, y)$. *Si le damos valores a* t *entre* 0 *y* 4 *y localizamos estos puntos en el plano xy, se obtendrá el gráfico de* $y = x^2$ *para* $0 \leq x \leq 4$, *y se dice que* $\alpha(t) = (t, t^2)$ *es una parametrización de la paràbola* $y = x^2$ *fig 1*

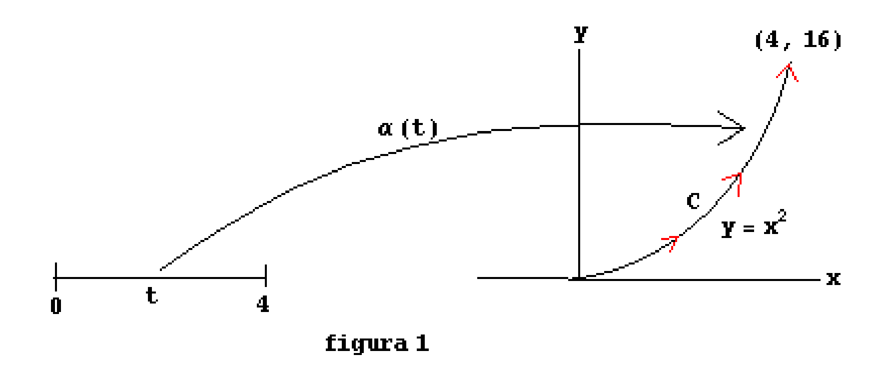


figura 1

La curva es regular, regular a trozos, no es cerrada, $\alpha(t) = (4-t, (4-t)^2)$ para $0 \leq t \leq 4$ es otra parametrización de la parábola $y = x^2$, pero su orientación es en sentido contrario .

Ejemplo 7.2 *Una parametrización de* $x^2 + y^2 = 1$ *es* $\alpha(t) = (\cos t, \sin t) = (x, y)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ *fig 2*

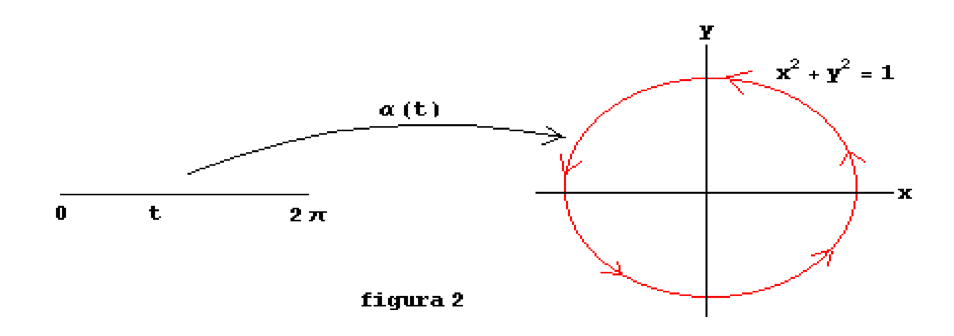
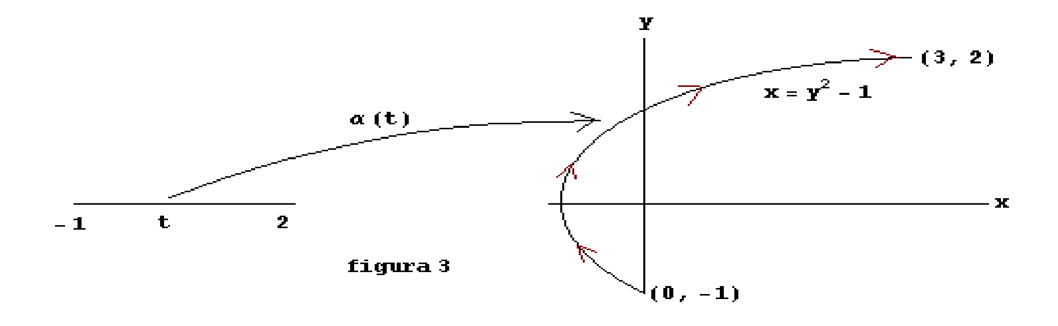


figura 2

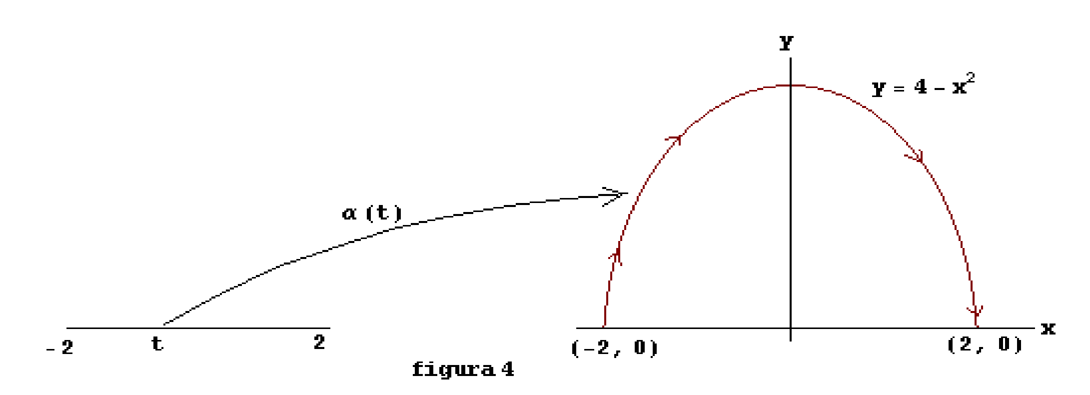
La curva es regular, regular a trozos, cerrada y cerrada simlpe y $\alpha(t) = (\cos t, -\sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ es otra parametrización, pero su orientación es en sentido contrario

Ejemplo 7.3 *Hallar una ecuación paramétrica para el gráfico de* $x = y^2 - 1$ *desde* $(0, -1)$ *hasta* $(3, 2)$ *fig 3*



Solución . Sea $y = t$ entonces $x = t^2 - 1$ y así $\alpha(t) = (t^2 - 1, t)$, $-1 \leq t \leq 2$ y $\beta(t) = ((2-t)^2 - 1, 2-t)$ $0 \leq t \leq 3$ es otra parametrización, pero su orientación es en sentido contrario

Ejemplo 7.4 *Hallar una ecuaciòn paramétrica para el gráfico de* $y = 4 - x^2$, $y \geq 0$ *fig 4*



Si $x = t$, $y = 4 - t^2$ y así $\alpha(t) = (t, 4 - t^2)$ $-2 \leq t \leq 2$ y si $x = 2 - t$, $y = 4 - (2-t)^2$ entonces $\beta(t) = (2 - t, 4 - (2-t)^2)$ $0 \leq t \leq 4$ es otra parametrización, pero con orientación contraria

Ejemplo 7.5 *Hallar parametrizaciones para el segmento de recta que tiene por punto inicial* $(0, 2, 0)$ *y punto final a* $(0, 2, 4)$. $\alpha(t) = (0, 2, t)$, $0 \leq t \leq 4$, $\beta(t) = (0, 2, 4t)$, $0 \leq t \leq 1$, $\psi(t) = (0, 2, 2t)$ $0 \leq t \leq 2$ *son todas parametrizaciones del segmento de recta con la misma orientaciòn y* $\delta(t) = (0, 2, 4 - t)$ $0 \leq t \leq 4$ *es otra parametrización del segmento de recta, pero con orientación contraria*

Ejemplo 7.6 *Una parametrizaciòn de* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ *es* $x/a = \cos t$, $y/b = \sin t$, *luego* $\alpha(t) = (a \cos t, b \sin t)$ $0 \leq t \leq 2\pi$

Ejemplo 7.7 *Una parametrización para el segmento de recta que tiene por punto inicial* $A \in R^n$ *y punto final a* $B \in R^n$ *es* $\alpha(t) = A + t(B - A) \quad 0 \leq t \leq 1$ *fig 5*

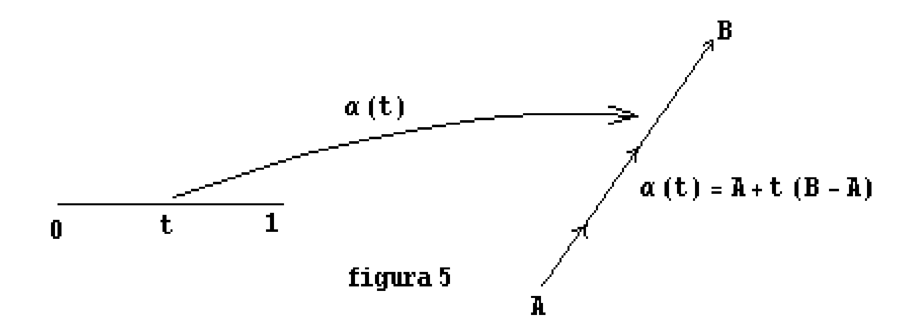


figura 5

Ejemplo 7.8 *Una parametrización para el gráfico de* $x^{2/3}+y^{2/3} = 1$ *es* $\alpha(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$ $0 \leq t \leq 2\pi$

Ejemplo 7.9 *Una parametrización para el gráfico de* $y = f(x)$ *es* $\alpha(t) = (t \quad, f(t))$ *o* $\beta(t) = (a - t, f(a - t))$ *según sea su orientación*

Ejemplo 7.10 *Una parametrización para el gráfico de* $y = x^2 + 4x$ *desde* $(-4, 0)$ *hasta* $(2, 12)$ *fig6 es*

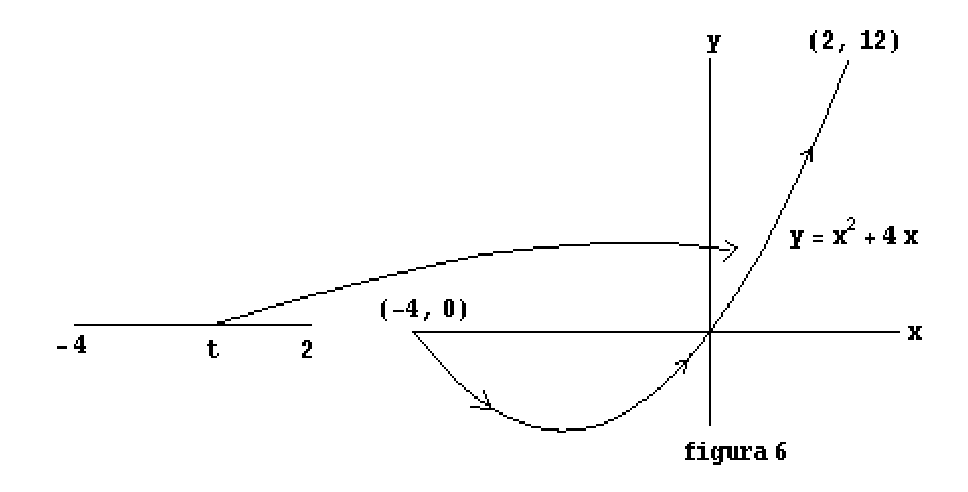
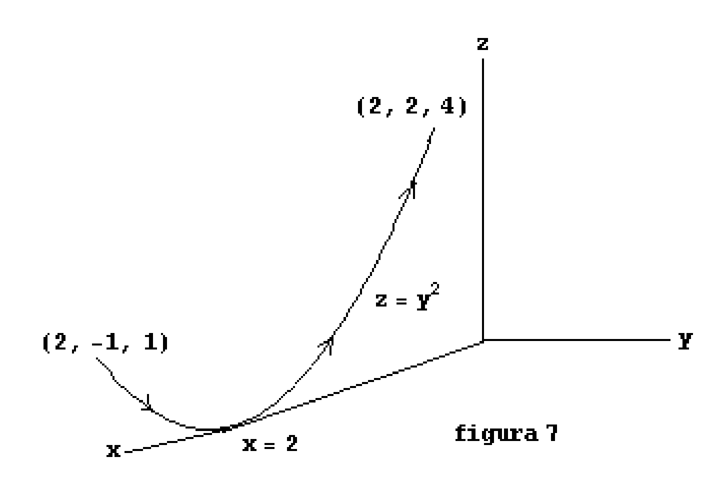


figura 6

$$\alpha(t) = (t, t^2 + 4t) \ -4 \leq t \leq 2 \ \text{ y } \beta(t) = (3 - t, (3 - t)^2 + 4(3 - t)) \quad 1 \leq t \leq 7$$

es otra parametrización pero en sentido contrario

Ejemplo 7.11 *Una parametrización para el gráfico de* $z = y^2$ *en* $x = 2$ *desde* $(2, -1, 1)$ *hasta* $(2, 2, 4)$ *fig 7*



$$\text{es} \quad \alpha(t) = (2, t, t^2) \ -1 \leq t \leq 2 \ \ y \ \ \beta(t) = (2, 4-t, (4-t)^2) \quad 2 \leq t \leq 5$$

es otra parametrizaciòn con orietaciòn contraria

Ejemplo 7.12

$$\alpha(t) = (\sqrt{1-t^2}, t) \ si -1 \leq t \leq 1 \ y \ \beta(t) = (\cos t, \sin t) \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

son parametrizaciones para el gráfico de $x = \sqrt{1-y^2}$ *desde* $(0, -1)$ *hasta* $(0, 1)$

Ejercicio 18 *Mostrar que*

1. $x = \sec t, \ y = \tan t$ es una parametrización de $x^2 - y^2 = 1$
2. $x = 2 + \cos t \ \ y = 1 + \sin t$ es una parametrización de $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$
3. $x = t + 1, \ y = 2t^2 - t - 1$ es una parametrización de $y = 2x^2 - 5x + 2$
4. $x = \sin t, \ y = -2\cos t \ \ 0 \leq t \leq \pi$ es una parametrización de $x^2 + y^2/4 = 1, \, x \geq 0$
5. $x = e^t, \ y = 4e^{2t}$ es una parametrización de $y = 4x^2 x > 0$
6. $x = 2t + 5, \ y = 3t - 7$ es una parametrización de $3x - 2y = 29$
7. $x = t^2, \ y = t - 2$ es una parametrización de $(y+2)^2 = x, x \geq 0$
8. $x = \sqrt{t}, \ y = 1 - t$ es una parametrización de $y = 1 - x^2, x \geq 0$

7.2 Integral de Linea de campos Escalares

Para motivar la definición de Integral de linea de un campo escalar, imaginémonos un alambre delgado con la forma de una curva regular a trozos C, con extremos A y B fig. Supongamos que el alambre tiene una densidad $f(x,y)$ en cada punto (x,y), con $f(x,y)$ continua y que $x = x(t)$, $y = y(t)$, para $t \in [a,b]$ es una parametrización de C fig 8

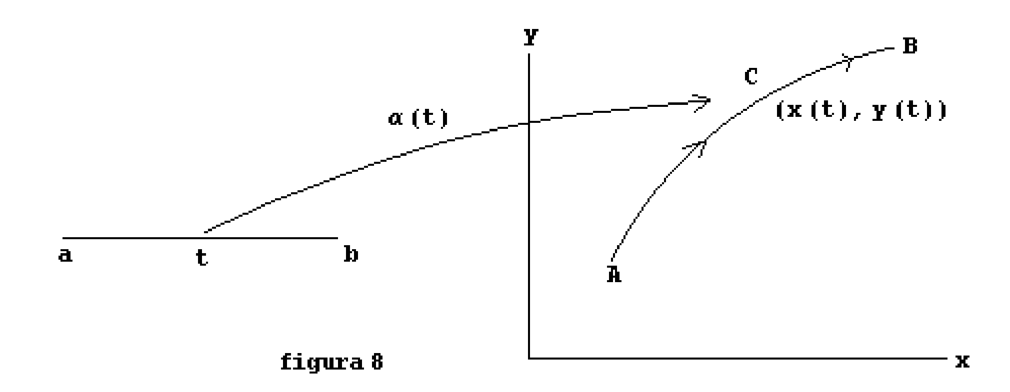


figura 8

Para aproximar la masa del alambre C, consideremos una partición $P = \{t_0, t_1, ..t_n\}$ de $[a,b]$, ésta lleva a una división de C en subarcos $P_{i-1}P_i$. Sea (x_i, y_i) el punto en C correspondiente a la imagen por t_i, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$, Δs_i la longitud del subarco $P_{i-1}P_i$, escojamos un punto (u_i, v_i) en $P_{i-1}P_i$ y para cada i evaluemos la función en (u_i, v_i) y multipliquemosla por Δs_i para formar $\sum_{i=1}^{n} f(u_i, v_i)\Delta s_i$, que es una estimación de la masa del alambre fig 9 y para hallar la masa exacta del alambre se hacen infinitas particiones es

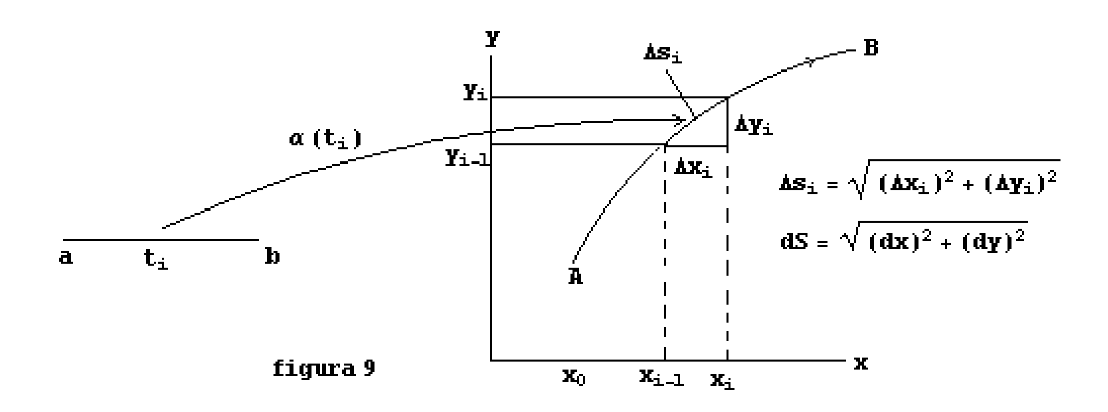


figura 9

decir,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(u_i,v_i)\Delta s_i = \int_c f(x,y)ds = \text{masa total del alambre} = m.$$

Los momentos vienen dados por

$$M_x = \int\limits_C yf(x,y)ds\ ,\ M_y = \int\limits_C xf(x,y)ds \ \text{ y}$$

$$(\overline{x},\overline{y}) = \left(\frac{M_y}{m},\frac{M_x}{m}\right)$$

son las coordenadas del centro de masa y en forma análoga si C está en el espacio se tiene que si $\rho(x,y,z)$ es la densidad del alambre entonces la masa y los momentos con respecto a los planos están dados por

$$m = \int_c \rho(x,y,z)ds,\quad M_{yz} = \int_c x\rho(x,y,z)ds,\ M_{zz} = \int_c y\rho(x,y,z)ds,\quad M_{xy} = \int_c z\rho(x,y,z)ds$$

$$\text{y } (\overline{x},\overline{y},\overline{z}) = \left(\frac{M_{yz}}{m},\frac{M_{xz}}{m},\frac{M_{xy}}{m}\right) \text{ son las coordenadas del centro de masa}$$

$$I_x = \int_c (y^2+z^2)\rho(x,y,z)ds,\quad I_y = \int_c (x^2+z^2)\rho(x,y,z)ds,\quad I_z = \int_c (x^2+y^2)\rho(x,y,z)ds$$

son los momentos de inercia alrededor de los ejes. Ahora

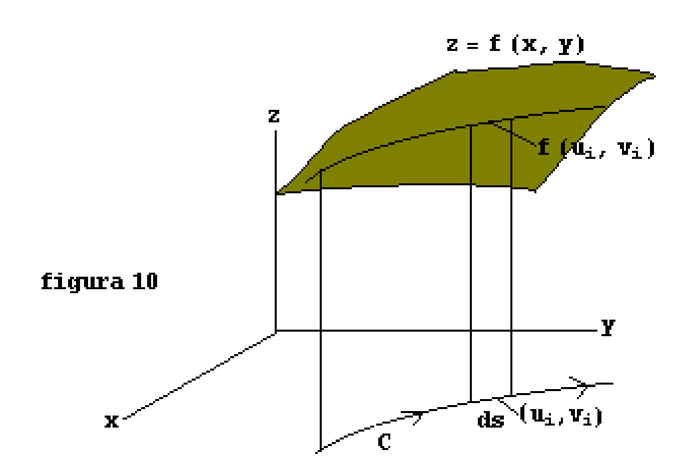
$$\int_c f(x,y)ds = \int_c f(x(t),y(t))\sqrt{(dx)^2+(dy)^2} = \int_c f(x(t),y(t))\sqrt{(dx/dt)^2+(dy/dt)^2}dt$$

$$= \int\limits_a^b f(\alpha(t))\,||\alpha'(t)||\,dt \quad para\ \alpha : [a,b] \ \longmapsto\ R^2.$$

De lo anterior se desprende que :

7.3 Area de un cilindro

a. Si $f(x,y) \geq 0$, entonces $\int_c f(x,y)ds$ es el área lateral del cilindro que tiene por base la curva C y altura $f(x,y)$ fig 10



7.4 Longitud de una curva

b.*Si* $f(x,y) = 1$ entonces la integral

$$\int_c f(x,y)ds = \int_c ds$$

representa la longitud de la curva, es decir,

$$\text{Longitud de la curva} = \int_c f(x,y)ds = \int_c 1ds = \int_c ds \ = \int_a^b ||\alpha'(t)||\, dt$$

Ejemplo 7.13 *Calcular*

$$\int_c xyds$$

si C *es el contorno del gráfico de* $y = x^2$ *desde* $(-1,1)$ *hasta* $(3,9)$ *fig 11*

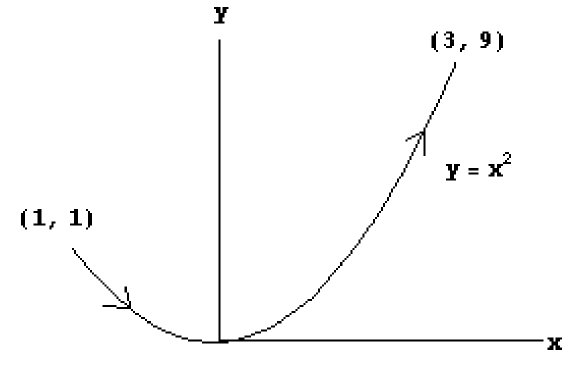


figura 11

$$\alpha(t) = \left(t, t^2\right) \ -1 \leq t \leq 3, \quad \alpha'(t) = (1, 2t)\,, ||\alpha'(t)|| = \sqrt{(1)^2 + (2t)^2} = \sqrt{1 + 4t^2}$$

$f(\alpha(t)) = f(t, t^2) = t(t^2) = t^3$ *entonces*

$$\int_c xyds = \int_{-1}^{3} t^3\sqrt{1 + 4t^2}dt = \frac{1961}{120}\sqrt{37} - \frac{5}{24}\sqrt{5} \quad y$$

$$\int_c ds = \int_a^b ||\alpha'(t)||\, dt = \int_{-1}^{3} \sqrt{1 + 4t^2}dt = \frac{3}{2}\sqrt{37} - \frac{1}{4}\ln\left(-6 + \sqrt{37}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{4}\ln\left(-2 + \sqrt{5}\right)$$

es la longitud de la curva

Ejemplo 7.14 *Calcular*

$$\int_c (x + y)ds$$

si C es el contorno del gráfico de $y = \sqrt{1 - x^2}$ *desde* $(1, 0)$ *hasta* $(-1, 0)$ *fg 12*

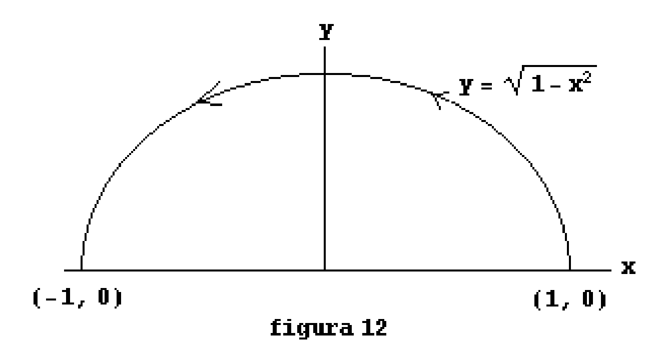


figura 12

Solución

$$\alpha(t) = \left(1 - t, \sqrt{1 - (1 - t)^2}\right) \quad 0 \leq t \leq 2, \quad \alpha'(t) = \left(-1, (1 - t)/\sqrt{2t - t^2}\right)$$

$||\alpha'(t)|| = 1/\sqrt{2t - t^2}$ $f(\alpha(t)) = f(1 - t, \sqrt{1 - (1 - t)^2}) = 1 - t + \sqrt{1 - (1 - t)^2}$
entonces

$$\int_c (x + y)ds = \int_0^2 (1 - t + \sqrt{1 - (1 - t)^2})(1/\sqrt{2t - t^2})dt = 2 \ \text{ y}$$

$$\int_c ds = \int_a^b ||\alpha'(t)||\, dt = \int_0^2 \left(1/\sqrt{2t-t^2}\right) dt = \pi$$

es la longitud de la curva. Y si se toma orta parametrización de la curva

$$\beta(t) = (\cos t, \sin t) \;\; 0 \leq t \leq \pi, \quad \beta'(t) = (-\sin t, \cos t)\,,$$

$$||\beta'(t)|| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = \sqrt{1} = 1, f(\beta(t)) = f(\cos t, \sin t) = \cos t + \sin t$$

entonces

$$\int_c (x+y) ds = \int_0^\pi (\cos t + \sin t) \cdot 1 dt = 2 \;\; y \;\; \int_c ds = \int_a^b ||\beta'(t)||\, dt = \int_0^\pi dt = \pi$$

Con este ejemplo se pretende mostrar que hay que elegir una paramtrización adecuada para que el cálculo de la integral sea más fácil

Ejemplo 7.15 *Calcular*

$$\int_c (x+y+z) ds$$

si C *es el contorno del segmento de recta que tiene como punto inicial* $(0,3,0)$ *y como punto final* $(0,3,5)$

Solución

$$\alpha(t) = (0,3,0) + t((0,3,5) - (0,3,0)) = (0,3,5t) \;\; 0 \leq t \leq 1, \quad \alpha'(t) = (0,0,5)\,,$$

$$||\alpha'(t)|| = \sqrt{(0)^2 + (0)^2 + (5)^2} = 5 \quad f(\alpha(t)) = f(0,3,5t) = 0 + 3 + 5t$$

entonces

$$\int_c (x+y+z) ds = \int_0^1 (3+5t)\, 5dt = \frac{55}{2} \;\; \text{y}$$

$$\int_c ds = \int_a^b ||\alpha'(t)||\, dt = \int_0^1 5dt = 5$$

es la longitud de la curva

Sea $\beta(t)$, otra parametrizaciòn

$$\beta(t) = (0,3,t) \;\; 0 \leq t \leq 5, \beta'(t) = (0,0,1)\,, \;\; ||\beta'(t)|| = \sqrt{(0)^2 + (0)^2 + (1)^2} = \sqrt{1} = 1,$$

$$f(\beta(t)) = f(0,3,t) = 3 + t$$

entonces

$$\int_c (x+y+z)ds = \int_0^5 (3+t)\,dt = \frac{55}{2} \text{ y}$$

$$\int_c ds = \int_a^b ||\beta'(t)||\,dt = \int_0^5 dt = 5$$

es longitud de la curva

Ejemplo 7.16 *Calcular*

$$\int_c x^2 y ds$$

si C es el contorno del cuadrado definido por los ejes coordenados y las rectas $x = 1$, $y = 1$ *recorrido una sola vez en sentido contrario a las manecillas del reloj fig 13*

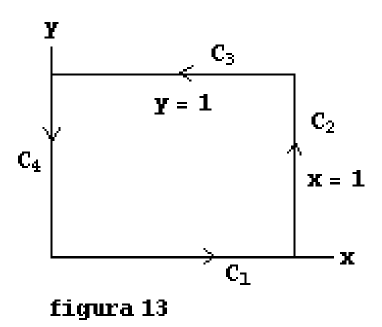


figura 13

C_k se puede parametrizar de la forma siguiente :

$$C_1,\ \alpha_1(t) = (t,0) \quad 0 \le t \le 1,\ \alpha_1'(t) = (1,0),\ \ ||\alpha_1'(t)|| = \sqrt{1} = 1$$

$$C_2,\ \alpha_2(t) = (1,t-1) \ \ 1 \le t \le 2,\ \alpha_2'(t) = (0,1),\ \ ||\alpha_2'(t)|| = \sqrt{1} = 1$$

$$C_3,\ \alpha_3(t) = (3-t,1) \ \ 2 \le t \le 3,\ \alpha_3'(t) = (-1,0),\ \ ||\alpha_3'(t)|| = \sqrt{1} = 1$$

$$C_4,\ \alpha_4(t) = (0,4-t) \ \ 3 \le t \le 4,\ \alpha_4'(t) = (0,-1),\ \ ||\alpha_4'(t)|| = \sqrt{1} = 1$$

y así

$$\int_c x^2 y ds = \int_{c_1} x^2 y ds + \int_{c_2} x^2 y ds + \int_{c_3} x^2 y ds + \int_{c_4} x^2 y ds =$$

$$\int_0^1 0dt + \int_1^2 (t-1)dt + \int_2^3 (3-t)^2 dt + \int_3^4 0dt = 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + 0 = \frac{5}{6}.$$

Sin embargo es más práctico considerar las curvas C_k completamente independientes sin pedir que se definan en intervalos consecutivos y pueden ser que esten definidos o no en el mismo intervalo. Por ejemplo, las curvas C_k se puden parametrizar así

$$C_1,\ \alpha_1(t) = (t,0) \quad 0 \le t \le 1,\ \alpha_1'(t) = (1,0),\ \ ||\alpha_1'(t)|| = \sqrt{1} = 1$$

$$C_2,\ \alpha_2(t) = (1,t) \quad 0 \le t \le 1,\ \alpha_2'(t) = (0,1),\ \ ||\alpha_2'(t)|| = \sqrt{1} = 1$$

$$C_3,\ \alpha_3(t) = (1-t,1) \quad 0 \le t \le 1,\ \alpha_3'(t) = (-1,0),\ \ ||\alpha_3'(t)|| = \sqrt{1} = 1$$

$$C_4,\ \alpha_4(t) = (0,1-t) \quad 0 \le t \le 1,\ \alpha_4'(t) = (0,-1),\ \ ||\alpha_4'(t)|| = \sqrt{1} = 1$$

y

$$\int_c x^2yds = \int_{c_1} x^2yds + \int_{c_2} x^2yds + \int_{c_3} x^2yds + \int_{c_4} x^2yds$$

$$= \int_0^1 0dt + \int_0^1 tdt + \int_0^1 (1-t)^2dt + \int_0^1 0dt = \frac{5}{6}$$

Ejemplo 7.17 *Calcular*

$$\int_c (x^2+y^2)ds$$

si C es el contorno de la cicunferencia $x^2+y^2=4$ *recorrida una sola vez en sentido contrario a las manecillas del reloj fig 14*

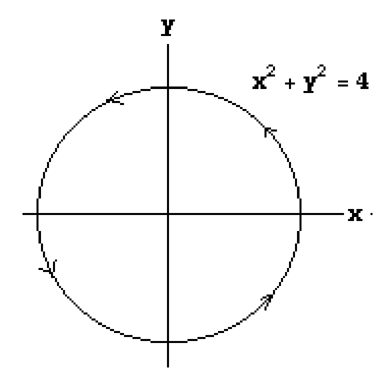


figura 14

Solución

$$\beta(t) = (2\cos t, 2\sin t) \;\; 0 \leq t \leq 2\pi, \quad \beta'(t) = (-2\sin t, 2\cos t)$$

$$||\beta'(t)|| = \sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2} = \sqrt{4} = 2, \;\; f(\beta(t)) = f(2\cos t, 2\sin t) = 4$$

entonces

$$\int_c (x^2 + y^2)ds = \int_0^{2\pi} 4 \cdot 2dt = 16\pi$$

Ejemplo 7.18 *Calcular*

$$\int_c xds$$

si C es el contorno de la parábola $y = x^2$ con la recta $y = 2x$ recorrida una sola vez en sentido contrario a las manecillas del reloj fig 15

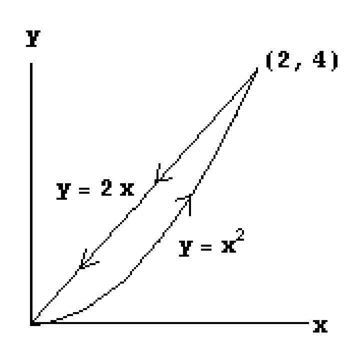


figura 15

Solución

$$\alpha_1(t) = \left(t, t^2\right) \;\; 0 \leq t \leq 2, \quad \alpha_1'(t) = (1, 2t), ||\alpha_1'(t)|| = \sqrt{1 + 4t^2}$$

$$f(\alpha_1(t)) = f(t, t^2) = t, \alpha_2(t) = (1 - t, 2(1 - t)) \;\; -1 \leq t \leq 1, \quad \alpha_2'(t) = (-1, -2),$$
$$||\alpha_2'(t)|| = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}, f(\alpha_2(t)) = f(1 - t, 2(1 - t)) = 1 - t$$

y así

$$\int_c xds = \int_{c_1} xds + \int_{c_2} xds = \int_0^2 t\sqrt{1 + 4t^2}dt + \int_{-1}^1 (1 - t)\sqrt{5}dt = \frac{17}{12}\sqrt{17} - \frac{1}{12} + 2\sqrt{5}$$

Ejemplo 7.19 *Calcular*

$$\int_c (x+y)ds$$

si C es el contorno de la cicunferencia $x^2+y^2=4$ *en* $z=3$, *recorrida una sola vez en sentido contrario a las manecillas del reloj fig 16*

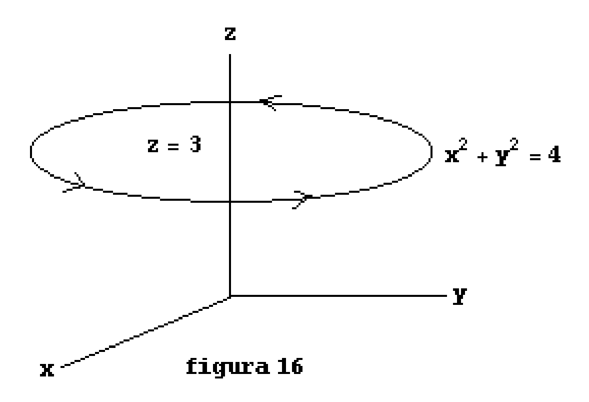


figura 16

Solución

$$\beta(t) = (2\cos t, 2\sin t, 3) \;\; 0 \le t \le 2\pi, \quad \beta'(t) = (-2\sin t, 2\cos t, 0),$$

$$||\beta'(t)|| = \sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2} = \sqrt{4} = 2, f(\beta(t)) = f(2\cos t, 2\sin t, 3) = 2\cos t + 2\sin t$$

entonces

$$\int_c (x+y)ds = \int_0^{2\pi} (2\cos t + 2\sin t) 2dt = 0$$

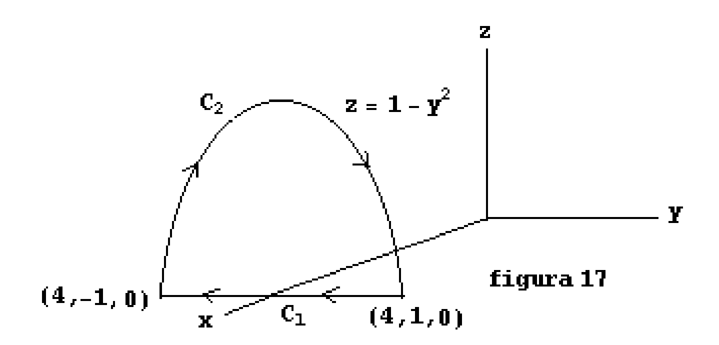
y

$$\int_c ds = \int_0^{2\pi} 2dt = 4\pi \;\; \text{su longitud}$$

Ejemplo 7.20 *Calcular*

$$\int_c (x+y+z)ds$$

si C es el contorno del segmento de recta desde $(4,1,0)$ *hasta* $(4,-1,0)$ *y luego recorre el gráfico de* $z=1-y^2$ *desde* $(4,-1,0)$ *hasta* $(4,1,0)$ *fig 17*



Solución

$$\alpha_1(t) = (4, 2-t, 0) \quad 1 \leq t \leq 3, \quad \alpha_1'(t) = (0, -1, 0), \quad ||\alpha_1'(t)|| = \sqrt{1} = 1$$
$$f(\alpha_1(t)) = f(4, 2-t, 0) = 4 + 2 - t + 0 = 6 - t$$
$$\alpha_2(t) = (4, t, 1-t^2), \quad -1 \leq t \leq 1, \quad \alpha_2'(t) = (0, 1, -2t), \quad ||\alpha_2'(t)|| = \sqrt{1+4t^2}$$
$$f(\alpha_2(t)) = f(4, t, 1-t^2) = 4 + t + 1 - t^2 = 5 + t - t^2$$

luego $\displaystyle\int_c (x+y+z)ds = \int_{c_1} (x+y+z)ds + \int_{c_2} (x+y+z)ds$

$$= \int_1^3 (6-t)dt + \int_{-1}^1 (5+t-t^2)\sqrt{1+4t^2}dt$$

Ejemplo 7.21 *Calcular*

$$\int_c (x-y)ds$$

si C es el contorno del gráfico de $x^2 + y^2 = 2x$ *recorrido en sentido contrario a las manecillas del reloj empezando en* $(2,0)$ *y terminando en* $(2,0)$ $fig18$

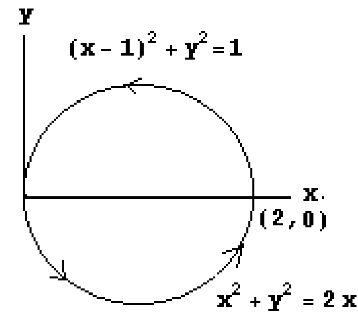


figura 18

Solución Si $x^2 + y^2 = 2x$ entonces $(x-1)^2 + y^2 = 1$ y

$$\alpha(t) = (1 + \cos t, \sin t) \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad \alpha'(t) = (-\sin t, \cos t)\,, \quad ||\alpha'(t)|| = 1$$

y asì

$$\int_c (x-y)ds = \int_a^b f(\alpha(t))\,||\alpha'(t)||\,dt = \int_0^{2\pi} (1 + \cos t - \sin t)dt = 2\pi$$

En coordenadas polares la ntegral se calcula así

$$r = 2\cos\theta \quad \text{y} \quad \text{Como} \quad x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

entonces

$$dx = (\partial x/\partial r)dr + (\partial x/\partial\theta)d\theta = \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta$$

$$dy = (\partial y/\partial r)dr + (\partial y/\partial\theta)d\theta = \sin\theta dr + r\cos\theta d\theta$$

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{(dr)^2 + r^2(d\theta)^2} = \sqrt{r^2 + (dr/d\theta)^2}d\theta$$

luego

$$\int_c (x-y)ds = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (r\cos\theta - r\sin\theta)\sqrt{(4\cos^2\theta + 4\sin^2\theta}d\theta =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2\cos\theta\cos\theta - 2\cos\theta\sin\theta)2d\theta = 2\pi$$

Ejemplo 7.22 *Calcular*

$$\int_c xds$$

si C es el contorno del gráfico de $r = 1 - \cos\theta$ recorrido en sentido contrario a las manecillas del reloj empezando en $\theta = 0$ y terminando en $\theta = 2\pi$ $fig19$

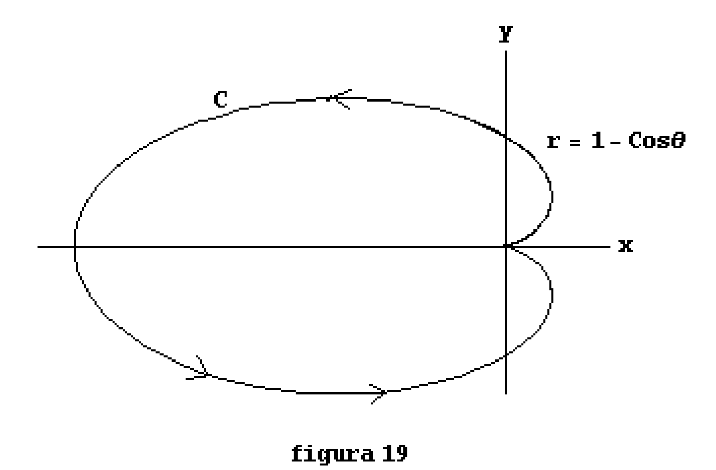


figura 19

$$\int_c xds = \int_c r\cos\theta\sqrt{r^2+(dr/d\theta)^2}d\theta = \int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)\cos\theta\sqrt{(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta}d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos\theta}\left(\cos\theta-\cos^2\theta\right)d\theta$$

y la longitud es

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta}d\theta = 8$$

Ejercicio 19 *Calcular las integrales*

$$a)\int_C (x-y+xy+)ds \quad y \quad b)\int_C xds \quad si\ C\ es$$

1. El contorno del gráfico de $y=|2x|$ desde $(-1,2)$ hasta $(1,2)$. Una parametrización de la curva es $\alpha(t)=(t,-2t)$ $-1\le t\le 0$, $\beta(t)=(t,2t)$ $0\le t\le 1$

2. El segmento de recta desde $(-1,2)$ hasta $(0,2)$ y luego el contorno de $y=2(x-1)^2$ desde $(0,2)$ hata $(1,0)$
   parametrización de la curva es $\alpha(t)=(t,2)$ $-1\le t\le 0$, $\beta(t)=(t+1,2t^2)$ $-1\le t\le 0$

3. El contorno del gráfico de $|x|+|y|=1$ recorrido una sola vez en sentido contrario de las manecillas del reloj
parametrización de cada curva es $\alpha(t)=(-t,1+t)$ $-1\leq t\leq 0$, $\beta(t)=(-t,1-t)$ $0\leq t\leq 1$, $\delta(t)=(t,-t-1)$ $-1\leq t\leq 0$, $\varphi(t)=(t,t-1)$ $0\leq t\leq 1$

4. El segmento de recta que une $(0,0)$ con $(1,0)$,el contorno del gràfico $y=\sqrt{1-x^2}$ desde $(1,0)$ hasta $(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2)})$ y el contorno del gràfico de $y=x$ desde $(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2)})$ hasta $(0,0)$. Una parametrización de cada curva es $\alpha(t)=(t,0)$ $0\leq t\leq 1$, $\beta(t)=(\cos t,\sin t)$ $0\leq t\leq\frac{\pi}{4}$, $\delta(t)=(-t,-t)$ $-\frac{\sqrt{2}}{2}\leq t\leq 0$

5. El contorno del gráfico de $y=x^2$ desde $(0,0)$ hasta $(-2,4)$ y luego $y=x+6$ hasta $(2,8)$ Una parametrización de la curva es $\alpha(t)=(-t,t^2)$ $0\leq t\leq 2$, $\beta(t)=(t,t+6)$ $-2\leq t\leq 2$,

6. El contorno del trapecio de vértices $(0,0)$, $(4,0)$, $(0,3)$, $(1,3)$ recorrido una sola vez en sentido contrario de las manecillas del reloj. Una parametrización de cada curva es $\alpha(t)=(t,0)$ $0\leq t\leq 4, \beta(t)=(4-t,t)$ $0\leq t\leq 3$, $\delta(t)=(-t,3)$ $-1\leq t\leq 0$, $\varphi(t)=(0,-t)$ $-3\leq t\leq 0$

7. El contorno de los gráficos de $y=x^2$ y $y=8-x^2$ desde $(-1,1)$ hasta $(-1,1)$ recorrido una sola vez en sentido contrario de las manecillas del reloj. Una parametrización de la curva es $\alpha(t)=(t,t^2),-1\leq t\leq 2$, $\beta(t)=(-t,8-t^2)$ $-2\leq t\leq 2$, $\varphi(t)=(t,t^2)$ $-2\leq t\leq -1$

8. El contorno de los gráficos de los gràficos $y=x,x+y=2,y=0$ recorrido una sola vez en sentido contrario de las manecillas del reloj. Una parametrización de la curva es $\alpha(t)=(t,0)$ $0\leq t\leq 2$, $\beta(t)=(-t,t+2)$ $-2\leq t\leq -1$ $\varphi(t)=(-t,-t)$ $-1\leq t\leq 0$

9. El cotorno de los gráficos de los gràficos $x=y^2,x=4$ recorrido una sola vez en sentido contrario de las manecillas del reloj.
parametrización de la curva es $\alpha(t)=(t^2,-t)$ $-2\leq t\leq 2$, $\beta(t)=(4,t)$ $-2\leq t\leq 2$

10. El contorno del gráfico de $x=y^3$ desde $(-1,-1)$ hasta $(1,1)$,Una parametrización de la curva es $\alpha(t)=(t^3,t)$ $-1\leq t\leq 1$

11. El contorno del gráfico que tiene por ecuaciones paramètricas $x=4t-1$, $y=3t+1$, $-1\leq t\leq 1$

12. Calcular la longitud de las cuvas dadas. Calcular la integral $\int_c ds$ para cada curva

13. Calcular el área de los cilindros que tienen por altura $f(x,y)=6$ y base cada una de las curvas dadas. Calcular la integral $\int_c 6ds$ para cada curva

14. Hallar el centro de masa de cada alambre del 1 al 10, si la densidad es $f(x,y) = x^2y^2$

7.5 Integrales de linea de campos vectoriales

Supongamos que un objeto se mueve a traves de un campo de fuerzas y que en cada instante t, tiene una posición $\alpha(t)$ y se encuentra sometido a una fuerza $f(\alpha(t))$.Cuando el objeto se mueve desde un instante a, a un instante b describe una curva C : $\alpha(t) = x(t)i+y(t)j, con\ \ t \in [a,b]$. Deseamos hallar el trabajo realizado por f a lo largo de la curva C. Miremos que sucede en un intervalo corto $[t_{k-1,}t_k] = [t, t+h]$ y como una estimación del trabajo realizado en este intervalo usaremos $f(\alpha(t)) \cdot (\alpha(t+h) - \alpha(t))$. Al hacer esta estimación utilizaremos el vector fuerza en el instante t y sustituimos el camino curvo entre $\alpha(t)$ y $\alpha(t+h)$ por el correspondiente segmento rectilineo. Si hacemos que $w(t)$ sea el trabajo total realizado hasta el instante t, $w(t+h)$ el trabajo total realizado hasta el instante $t+h$; el trabajo realizado desde el instante t hasta el $t+h$, ha de ser la diferencia $w(t+h) - w(t)$.Ahora $w(t+h) - w(t) \simeq f(\ \alpha(t)) \cdot (\alpha(t+h) - \alpha(t))$ y si dividimos por h esta expresiòn y tomamos lìmite cuando h tiende a 0 se tiene que :
$w'(t) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{w(t+h) - w(t)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} f(\alpha(t)) \cdot \dfrac{(\alpha(t+h) - \alpha(t))}{h} = f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)$ y asì
$w'(t) = f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)$ e integrando entre a y b esta igualdad se tiene

$$\int_a^b w'(t)dt = w(b) - w(a) = \int_a^b f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t).$$

Como $w(a) = 0$ entonces el trabajo total realizado es $w(b)$, es decir, trabajo total relizado es

$$w(b) - w(a) = \int_a^b w'(t)dt = \int_a^b f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)dt = \int_C f \cdot d\alpha$$

Si

$$\alpha(t) = (x(t), y(t)), \alpha'(t)dt = (dx/dt, dy/dt)\, dt, f(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$$

y

$$f(x(t), y(t)) = (P(x(t), y(t)), Q(x(t), y(t)))$$

y así

$$f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)dt = (P(x(t), y(t)), Q(x(t), y(t))) \cdot (dx/dt, dy/dt)\, dt = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

$$\text{luego } \int_C f \cdot d\alpha = \int_C f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)dt = \int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

En forma análoga se tiene para R^3que:

$$\int_C f \cdot d\alpha = \int_C f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)dt = \int_C P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

7.6 Algunas propiedades.

i. Sea C una curva regular a trozos, si $\alpha(t)$ es una parametrización de C con dominio $[a,b]$ y $\beta(t)$ es otra parametrización de C con dominio $[c,d]$, si $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ recorren la curva en el mismo sentido, entonces

$$\int_C f \cdot d\alpha = \int_C f \cdot d\beta$$

Si las dos parametrizaciones α y β recorren la curva en direcciones opuestas, entonces

$$\int_C f \cdot d\alpha = -\int_C f \cdot d\beta$$

ii. Sean a y b nùmeros reales, $f(x,y)$ y $g(x,y)$ dos campos vectoriales entonces

$$\int_C (af + bg) \cdot d\alpha = a\int_C f \cdot d\alpha + b\int_C g \cdot d\alpha$$

iii. *Sea* $f(x,y)$ un campo vectorial definido sobre una curva C y ésta se puede descom-

poner en C_1, C_2, C_3 , .., C_n entonces

$$\int_C f \cdot d\alpha = \int_{C_1} f \cdot d\alpha + \int_{C_2} f \cdot d\alpha + ... + \int_{C_n} f \cdot d\alpha$$

Ejemplo 7.23 *Hallar el trabajo que se necesita para mover una partícula desde el punto* $(0,0)$ *hasta* $(3,9)$ *a lo largo del gráfico de* $y = x^2$ *si se le aplica una fuerza* $f(x,y) = x^2i + xyj$

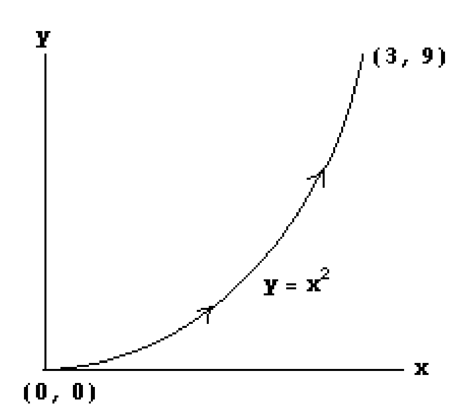


figura 21

Solución .

$$\alpha(t) = (t, t^2) \quad 0 \leq t \leq 3, \quad \alpha'(t) = (1, 2t), \quad f(\alpha(t)) = f(t, t^2) = (t^2, t^3)$$

luego

$$w = \int_C f \cdot d\alpha = \int_C f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)dt = \int_C (t^2, t^3) \cdot (1, 2t)dt = \int_0^3 (t^2 + 2t^4)dt = \frac{531}{5}$$

y

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_C x^2dx + xydy = \int_0^3 (t^2.1 + t^3.2t)dt = \int_0^3 \left(t^2 + 2t^4\right) dt = \frac{531}{5}$$

Ejemplo 7.24 *Calcular*

$$\int_C f \cdot d\alpha$$

si C es el contorno del triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,1)$, $(1,0)$ *con orientación contraria a las manecillas de reloj si* $f(x,y) = (xy^2, x - y)$ *fig22*

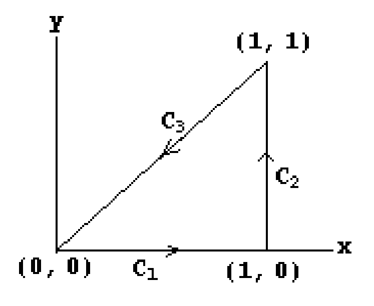


figura 22

Solución Para C_1, $\alpha_1(t) = (t, 0)$ $\quad 0 \leq t \leq 1$ $\quad \alpha_1'(t) = (1, 0)$, para C_2, $\alpha_2(t) = (1, t)$ $0 \leq t \leq 1$ $\quad \alpha_2'(t) = (0, 1)$, para C_3, $\alpha_3(t) = (1 - t, 1 - t)$ $\quad 0 \leq t \leq 1$, $\quad \alpha_3'(t) = (-1, -1)$ entonces

$$\int_C f \cdot d\alpha = \int_{C_1} f \cdot d\alpha + \int_{C_2} f \cdot d\alpha + \int_{C_3} f \cdot d\alpha =$$

$$= \int_0^1 f(t, 0) \cdot (1, 0)dt + \int_0^1 f(1, t) \cdot (0, 1)dt + \int_0^1 f(1 - t, 1 - t) \cdot (-1, -1)dt =$$

$$= \int_0^1 (0, t) \cdot (1, 0)dt + \int_0^1 (t^2, 1 - t) \cdot (0, 1)dt + \int_0^1 \left((1 - t)^3, 0\right) \cdot (-1, -1)dt =$$

$$= \int_0^1 0dt + \int_0^1 (1 - t)dt - \int_0^1 (1 - t)^3 dt = \frac{1}{4}$$

Ejemplo 7.25 *Calcular*

$$\int_C f \cdot d\alpha$$

si C es el contorno de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ con orientación contraria a las manecillas de reloj si $f(x, y) = (-y/2, x/2)$ f ig 23

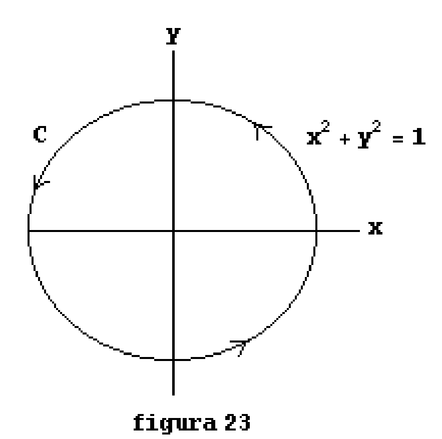


figura 23

$\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$ $\ 0 \leq t \leq 2\pi$, $\ \alpha'(t) = (-\sin t, \cos t)$ entonces

$$\int_C f \cdot d\alpha = \int_C (-y/2)dx + (x/2)dy = \int_0^{2\pi} (((-\sin t)/2) \,.\, (-\sin t) + ((\cos t)/2)\,(\cos t))dt$$

$$= 1/2 \int_{0}^{2\pi} dt = \pi$$

Ejemplo 7.26 *Calcular*

$$\int_C xydx + xzdy + yzdz$$

si C es la curva que tiene por ecuación paramétrica $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3 \quad 0 \leq t \leq 2$.

Soluciòn

$$\int_C xydx + xzdy + yzdz = \int_{0}^{2} \left(t^3 + 2t^5 + 3t^7\right) dt = \frac{364}{3}$$

En general el valor de la integral $\int_C f \cdot d\alpha$ depende del camino de integración C, pero

en ciertos casos el valor de la integral no varia para todos los caminos dentro de una región Q, que tienen el mismo punto inicial A y el mismo punto final B. Para estos casos se dice que la integral de linea es independiente del camino en Q y se dice que f es conservativo, más aun si dado un campo vectorial f, si existe un campo escalar φ talque $f = \nabla\varphi$ en Q con φ continuamente diferenciable entonces el campo vectorial f se dice conservativo y a φ la funciòn potencial

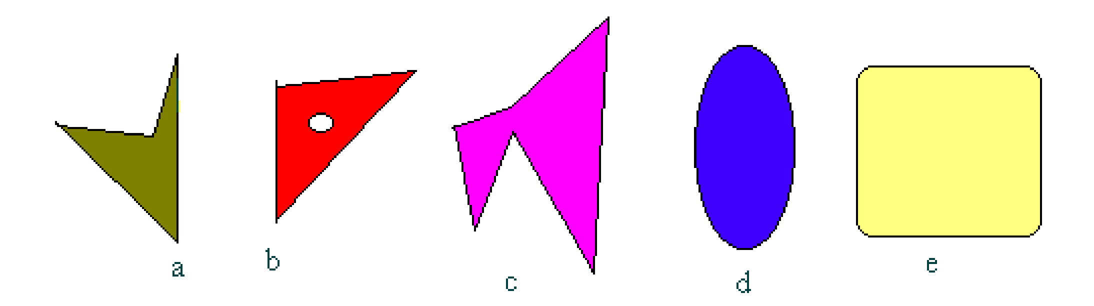
Ejemplo 7.27 $f(x, y) = (2xy, x^2)$ *es un campo vectorial conservativo y tiene a* $\varphi(x, y) = x^2 y$ *como funciòn potencial, pues* $\nabla\varphi = f$

Ejemplo 7.28 $f(x, y, z) = (x^2, y, z^3)$ *es un campo vectorial conservativo y tiene a* $\varphi(x, y, z) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{z^4}{4}$ *como funciòn potencial, pues* $\nabla\varphi = f$

Un conjunto $S \subseteq R^n$, S abierto, se dice conexo, si dados dos puntos a y b en S, existe un camino regular a trozos que une a con b en S.

Un conjunto $S \subseteq R^n$, S abierto, se dice convexo, si dados dos puntos a y b en S, el segmento de recta que une a con b está en S.

Un conjunto $S \subseteq R^n$, S abierto, se dice simplemente conexo, si toda curva simple cerrada en S encierra solo puntos de S



a, b, c son conjuntos conexos y no convexos, d y e son convexos, conexos y simplemente conexos

Ejemplo 7.29 *R, R^2, R^3 son conjuntos abiertos conexos, convexos y simplemente conexos*

Ejemplo 7.30 *$S = \{(x, y)/4 < x^2 + y^2 < 9\}$es abierto, conexo, no convexo y no simplemente conexo*

Teorema 1 *Si φ es un campo escalar diferenciable con $\nabla\varphi$ continuo en un conjunto abierto, conexo S de R^n,entonces para dos puntos cualquier a y b unidos por una curva regular a trozos en S se tiene que*

$$\int_a^b \nabla\varphi \cdot d\alpha = \varphi(b) - \varphi(a)$$

recibe el nombre de teorema fundamental del càlculo para integrales de linea

Ejemplo 7.31 *Sea $\varphi(x, y) = 3x^2 + xy - x$, $\nabla\varphi(x, y) = (6x + y - 1, x) = f(x, y)$, luego si*

C es el segmento de recta que une los puntos $(0, 0)$ con $(2, 3)$ integral de linea viene dada por

$$\int_C f \cdot d\alpha = \int_C \nabla\varphi \cdot d\alpha = \varphi(2, 3) - \varphi(0, 0) = 16$$

Teorema 2 *Si f es un campo vectorial continuo en un conjunto abierto y conexo S de R^n entonces las afimaciones siguientes son todas equivalentes:*

f es gradiente de una cierta funciòn potencial en S, si y solo si, la integral de linea de f es independiente del camino en S, si y solo si, la integral de linea de f alrededor de toda curva simple cerrada regular a trozos contenida en S es cero

Teorema 3 *Sea f un campo vectorial diferenciable con continuidad en un conjunto S abierto convexo (o simplemente conexo)de R^n.El campo f es un gradiente en S si y solo si $D_k f_j(x) = D_j f_k(x)$ para cada x en S y $k = 1, 2...n$. En R^2 el campo f es un gradiente en S si y solo si $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ para cada (x, y) en R^2, pues*

$$f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)) = (P(x, y), Q(x, y))$$

entonces

$$D_1 f_1(x, y) = D_1 f_1(x, y), \text{ es decir, } \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$D_2 f_2(x, y) = D_2 f_2(x, y), \text{ es decir, } \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial y}$$

$$D_1 f_2(x, y) = D_2 f_1(x, y), \text{es decir, } \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

Ejemplo 7.32 *Sea $f(x, y) = (x + y, x - y) = (P(x, y), Q(x, y))$.Como $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y} = 1$ en todo R^2, que es convexo y abierto, se concluye que f es un gradiente en R^2 y la integral de linea es independiente del camino y que $\oint\limits_C f \cdot d\alpha = 0$ para toda curva cerrada regular a trozos que estè en R^2. Una forma de hallar la funciòn potencial es : Como $f = \nabla\varphi$ entonces $(P, Q) = \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}, \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\right)$ y de aquì $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = P$, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = Q$, luego integrando la primera ecuación con respecto a x se tiene*

$$\varphi(x, y) = \int P(x, y)dx + A(y) = \int (x + y)dx + A(y) = x^2/2 + xy + A(y)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = x + \frac{\partial A}{\partial y} = Q \; = x - y$$

entonces $\dfrac{\partial A}{\partial y} = -y$, es decir $A(y) = -y^2/2 + k$

luego

$$\varphi(x, y) = \frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2}$$

En forma similar, si escoje la segunda ecuación e integra con respecto a y

Ejemplo 7.33 *Sea* $f(x,y) = 3x^2yi + x^3yj$ *como* $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2y \neq \dfrac{\partial P}{\partial y} = 3x^2$ *excepto cuando* $x = 0$ *o* $y = 1$ *se puede concluir que este campo no es gradiente en ningún subconjunto abierto de* R^2

En R^3, El campo f es un gradiente en S si y solo si

$$\frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial z}, \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

para cada (x,y,z) en R^3, pues

$$f(x,y,z) = (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z)) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$$

entonces

$$D_1f_1(x,y,z) = D_1f_1(x,y,z), \text{ es decir, } \quad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$D_2f_2(x,y,z) = D_2f_2(x,y,z), \text{ es decir, } \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial y}$$

$$D_3f_3(x,y,z) = D_3f_3(x,y,z), \text{ es decir, } \quad \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial z}$$

$$D_1f_2(x,y,z) = D_2f_1(x,y,z), \text{ es decir, } \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$D_1f_3(x,y,z) = D_3f_1(x,y,z), \text{ es decir, } \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$$

$$D_3f_2(x,y,z) = D_2f_3(x,y,z), \text{ es decir, } \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}$$

Ejemplo 7.34 *Sea* $f(x,y,z) = (x^2, y, z^3) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$. *Como las relaciones* $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0$, $\dfrac{\partial R}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial z} = 0$ $\quad \dfrac{\partial R}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial z} = 0$ *se cumplen en todo* R^3 *que es abierto y convexo, se tiene que f es un gradiente y la integral* $\int_C f \cdot d\alpha$ *es independiente del camino y la integral* $\oint\limits_C f \cdot d\alpha = 0$ *para toda curva cerrada regular a trozos que estè en* R^3

Ejemplo 7.35 *Sea* $f(x,y,z) = (yz+y+z, xz+x, xy+x) = (P(x,y,z), Q(x,y,), R(x,y,z))$. *Como las relaciones*

$\dfrac{\partial Q}{\partial x} = z+1 = \dfrac{\partial P}{\partial y}, \dfrac{\partial R}{\partial x} = y+1 = \dfrac{\partial P}{\partial z} \qquad \dfrac{\partial R}{\partial y} = x = \dfrac{\partial Q}{\partial z}$ se cumplen en todo R^3 que es abierto y convexo, se tiene que : f es un gradiente, la integral $\int_C f \cdot d\alpha$ es independiente del camino y $\oint\limits_C f \cdot d\alpha = 0$ para toda curva cerrada regular a trozos que esté en R^3.Para hallar la función potencial se sabe que $f = \nabla\varphi$ entonces $(P, Q, R) = \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}, \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}, \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$ y de aquí

$\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = P, \quad \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = Q, \quad \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} = R$ luego integrando la primera ecuación con respecto a x se tiene

$$\varphi(x,y,z) = \int P(x,y,z)dx + A(y,z) = \int (yz+y+z)dx + A(y,z) = xyz+xy+xz+A(y,z)$$

y $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = xz + x + \dfrac{\partial A}{\partial y} = Q = xz + x$ entonces $\dfrac{\partial A}{\partial y} = 0$, es decir $A(y,z) = B(z)$

luego

$$\varphi(x,y,z) = \quad xyz + xy + xz + B(z)$$

pero $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z} = xy + x + \; B'(z) = R \; = xy + x$ se concluye que $B(z) = k$ y asì

$$\varphi(x,y,z) = \quad xyz + xy + xz + k$$

y las integrales

$$\int\limits_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} (yz + y + z)dx + (xz + x)dy + (xy + x)dz = \varphi(1,1,1) - \varphi(0,0,0) = 3 - 0 = 3$$

$$\oint\limits_C f \cdot d\alpha = 0$$

si C es cualquier curva simple cerrada regular a trozos en R^3

Ejemplo 7.36 *Sea* $f(x,y,z) = (yz+y+x, xz+x, xy+x) = (P(x,y,z), Q(x,y,), R(x,y,z))$. *Como las relaciones*

$\dfrac{\partial Q}{\partial x} = z + 1 = \dfrac{\partial P}{\partial y}, \dfrac{\partial R}{\partial x} = y + 1 \neq y = \dfrac{\partial P}{\partial z} \qquad \dfrac{\partial R}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial z} = x$ *no se cumplen todas en* R^3, *entonces* f *es no es un gradiente en* R^3

Observaciones .

$i.$.Si $\oint\limits_C f \cdot d\alpha \neq 0$ para alguna curva cerrada C, entonces f no es un gradiente . Si $\oint\limits_C f \cdot d\alpha = 0$ para infinitas curvas cerradas no se deduce necesariamente que f es un gradiente, pues se puede comprobar que la integral de linea del campo vectorial $f(x,y) = (x, xy)$ es cero para todo cìrculo con centro en el origen, no obstante este campo no es un gradiente .

$ii.$.Sea S el conjunto de todos los puntos $(x,y) \neq (0,0)$ en R^2 y

$f(x,y) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$ se puede verificar que $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ en S y sin embargo la integral de linea a lo largo de la circunferncia de radio 1 no es cero, pues $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$ $\alpha'(t) = (-\sin t, \cos t)$

$$\oint\limits_C f \cdot d\alpha = \int_0^{2\pi} f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi$$

Observe que S no es convexo

Sea $f(x,y) = P(x,y)i + Q(x,y)j$ un campo vectorial derivable con continuidad en un conjunto abierto conexo S del plano y supongamos que $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ en todo S.Sean C_1, C_2 dos curvas simples cerradas regulares a trozos en S que satisfacen las propiedades

$i.C_2$ está en el interior de C_1

$ii.$Los puntos interiores a C_1 que son exteriores a C_2 pertenecen a S entonces

$$\oint\limits_{C_1} f \cdot d\alpha = \oint\limits_{C_2} f \cdot d\alpha$$

recorriendo ambas curvas en el mismo sentido

Ejemplo 7.37 *Calcular la integral*

$$\oint\limits_C \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$$

donde C contorno del cuadrado de vértices $(2,2)$, $(-2,2)$, $(-2,-2)$, $(2,-2)$ *y* S *es el conjunto de todos los puntos* $(x,y) \neq (0,0)$ *en* R^2.*Como*

$\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ en S y sea C_1el contorno de la circunferencia de radio 1 fig 24

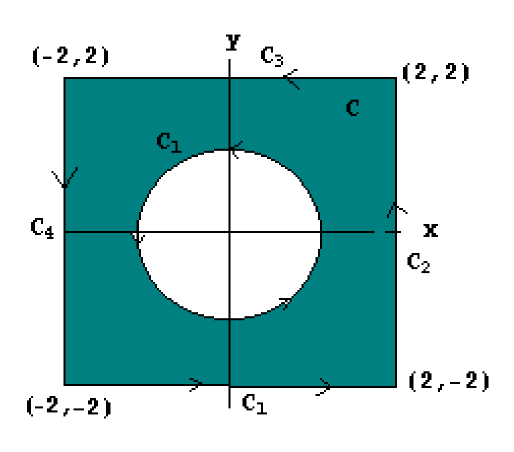


figura 24

con parametrización $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$ $\alpha'(t) = (-\sin t, \cos t)$ entonces

$$\oint_C \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy = \oint_{C_1} \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy = \int_0^{2\pi} f(\alpha(t))\cdot\alpha'(t)dt = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)dt = 2\pi$$

Ejercicio 20 *Calcular las integrales*

$$\int_C (xy - y)dx + (x + 3y^2)dy \qquad y \qquad \int_C xdy \qquad si \;\; C \;\; es$$

1. El contorno del gráfico de $y = |2x|$ desde $(-1, 2)$ hasta $(1, 2)$
2. El segmento de recta desde $(-1, 2)$ hasta $(0, 2)$ y luego el contorno de $y = 2(x - 1)^2$ desde $(0, 2)$ hasta $(1, 0)$
3. El contorno del gráfico de $|x| + |y| = 1$ recorrido una sola vez en sentido contrario de las manecillas del reloj
4. El segmento de recta que une $(0, 0)$ con $(1, 0)$, el contorno del gráfico $y = \sqrt{1 - x^2}$ desde $(1, 0)$ hasta $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2)})$ y el contorno del gráfico de $y = x$ desde $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2)})$ hasta $(0, 0)$

5. El contorno del gráfico de $y = x^2$ desde $(0,0)$ hasta $(-2,4)$ y luego $y = x+6$ hasta $(2,8)$

6. El contorno del trapecio de vértices $(0,0)$, $(4,0)$, $(1,3), (0,3)$ recorrido una sola vez en sentido contrario de las manecillas del reloj

7. El contorno de los gráficos de $y = x^2$ y $y = 8 - x^2$ desde $(-1,1)$ hasta $(-1,1)$ recorrido una sola vez en sentido contrario de las manecillas del reloj

8. El contorno de los gráficos $y = x, x+y = 2, y = 0$ recorrido una sola vez en sentido contrario de las manecillas del reloj

9. El contorno de los gráficos $x = y^2$, $x = 4$ recorrido una sola vez en sentido contrario de las manecillas del reloj

10. El contorno del gráficos de $x = y^3$ desde $(-1,-1)$ hasta $(1,1)$

11. El contorno del gráficos que tiene por ecuaciones paramétricas $x = 4t-1$, $y = 3t+1$, $-1 \leq t \leq 1$

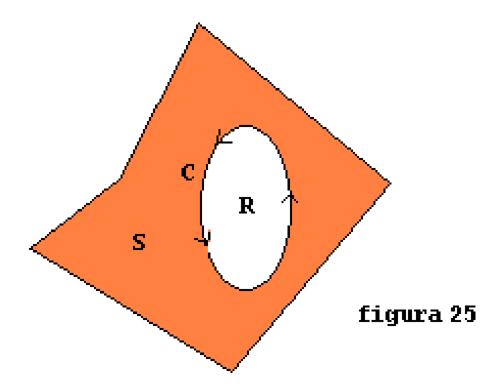
12. Mostrar que

$$\int_{(0,0)}^{(1,2)} (y^2 + 2xy)dx + (x^2 + 2xy)dy = 6, \quad \int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} 2xdx + 3y^2dy + 4z^2dz = \frac{10}{3},$$

$$\int_{(1,1,1)}^{(2,3,4)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dy + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dz = \sqrt{29} - \sqrt{3}$$

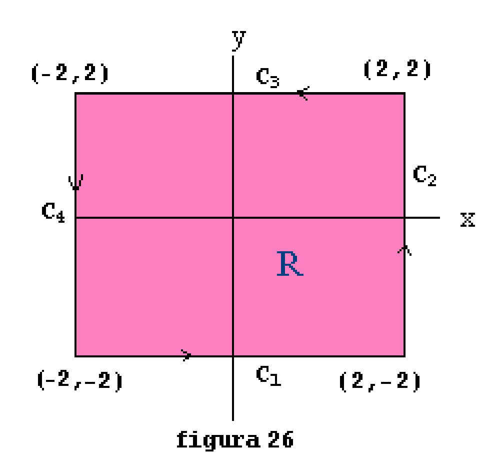
7.7 Teorema de Green

Sea $f(x,y) = P(x,y)i + Q(x,y)j$ un campo vectorial diferenciable con continuidad en un abierto S del plano xy y sea C una curva regular a trozos simple cerrada en S y R la reunión de C con su interior fig 25 entonces



$$\oint_c P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_R (\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y)\, dxdy$$

Ejemplo 7.38 *Ilustrar el teorema de Green si* $f(x,y) = (-y/2, x/2) = P(x,y)i + Q(x,y)j$ *y* C *es el contorno del cuadrado de vértices* $(2,2), (-2,2), (-2,-2), (2,-2)$ *fig 26*



Solución Las hipotesis del teorema de Green se cumplen luego
a.

$$\iint_R (\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y)\, dxdy = \iint_R (1/2 - (-1/2))\, dxdy = \iint_R dxdy = \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} dydx = 16$$

b Las parametrizaciones para C_k vienen dadas por

$\alpha_1(t) = (t, -2) \quad -2 \le t \le 2 \qquad \alpha_1'(t) = (1, 0) = (dx, dy)$
$\alpha_2(t) = (2, t) \quad -2 \le t \le 2 \qquad \alpha_2'(t) = (0, 1) = (dx, dy)$
$\alpha_3(t) = (-t, 2) \quad -2 \le t \le 2 \qquad \alpha_3'(t) = (-1, 0) = (dx, dy)$
$\alpha_4(t) = (-2, -t) \quad -2 \le t \le 2 \qquad \alpha_4'(t) = (0, 1) = \quad (dx, dy)$ entonces

$$\oint_c P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \oint_c -\frac{y}{2}dx + \frac{x}{2}dy$$

$$= \oint_{c_1} -\frac{y}{2}dx + \frac{x}{2}dy + \oint_{c_2} -\frac{y}{2}dx + \frac{x}{2}dy + \oint_{c_3} -\frac{y}{2}dx + \frac{x}{2}dy + \oint_{c_4} -\frac{y}{2}dx + \frac{x}{2}dy$$

$$= \int_{-2}^{2} \left(-\frac{-2}{2}.1 + (t/2).0\right) dt + \int_{-2}^{2} \left(\text{-}\frac{\text{t}}{2}.0 + 1\right) dt + \int_{-2}^{2} \left(\text{-}\frac{2}{2}.(-1) + (\text{-}t/2).0\right) dt + dt$$

$$+ \int_{-2}^{2} \left(-\frac{-t}{2}.0 + (-2/2).(-1)\right) dt = \int_{-2}^{2} dt + \int_{-2}^{2} dt + \int_{-2}^{2} dt + \int_{-2}^{2} dt = 16$$

luego

$$\oint_c P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_R (\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y)\, dxdy$$

Ejemplo 7.39 *Ilustrar el teorema de Green si* $f(x,y) = (-xy, y) = P(x,y)i + Q(x,y)j$ *y* C *es el contorno del gráfico de* $y = x^2$ *y* $y = 1$ *en sentido contrario a las manecillas del reloj fig 27*

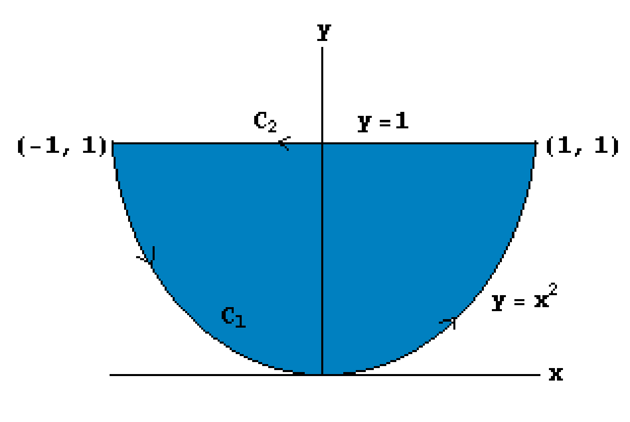


figura 27

Solución Las hipotesis del teorema de Green se cumplen luego
$a.$

$$\iint_R (\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y)\, dxdy = \iint_R (0-(-x))\, dxdy = \iint_R xdxdy = \int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1} xdydx = 0$$

$b.$ Las parametrizaciones para C_k vienen dadas por
$\alpha_1(t) = (t, t^2) \quad -1 \leq t \leq 1 \qquad \alpha_1'(t) = (1, 2t) = (dx, dy)$
$\alpha_2(t) = (-t, 1) \quad -1 \leq t \leq 1 \qquad \alpha_2'(t) = (-1, 0) = (dx, dy)$ entonces

$$\oint_c P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \oint_c -xydx + ydy = \oint_{c_1} -xydx + ydy + \oint_{c_2} -xydx + ydy =$$

$$\int_{-1}^{1} \left(\text{-}t^3.1 + t^2 2t\right) dt + \int_{-1}^{1} (t.(-1) + (1).0)\, dt = \int_{-1}^{1} t^3 dt - \int_{-1}^{1} tdt = 0$$

luego

$$\oint_c P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_R (\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y)\, dxdy$$

Ejemplo 7.40 *Ilustrar el teorema de Green si* $f(x,y) = y^2 i + xj = P(x,y)i + Q(x,y)j$ *y* C *es el contorno del gráfico de* $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{2} = 1$ *en sentido contrario a las manecillas del reloj fig28*

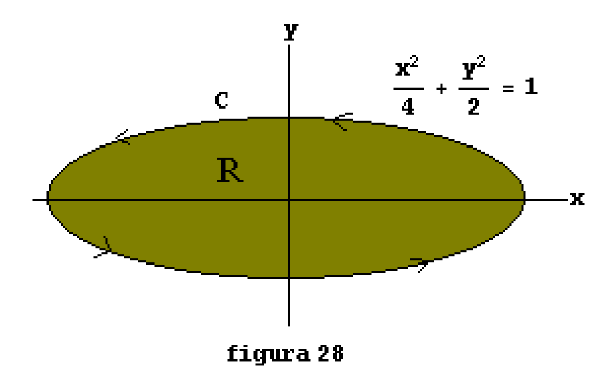


figura 28

Solución Las hipótesis del teorema de Green se cumplen luego

$$\alpha(t) = \left(2\cos t, \sqrt{2}\sin t\right) \quad 0 \leq t \leq 2\pi \qquad \alpha_1'(t) = \left(-2\sin t, \sqrt{2}\cos t\right) = (dx, dy)$$

entonces

$$\oint_c P(x,y)dx+Q(x,y)dy = \oint_c y^2dx+xdy = \int_0^{2\pi}\left((2\sin^2 t)(-2\sin t)+(2\cos t)(\sqrt{2}\cos t)\right)dt =$$

$$\int_0^{2\pi}\left(-4\sin^3 t+2\sqrt{2}\cos^2 t\right)dt = 2\pi\sqrt{2}.$$

$$\iint_R (\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y)\,dxdy = \iint_R (1-2y)dxdy = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{\sqrt{(4-x^2)/2}}(1-2y)dydx =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 (1-2\sqrt{2}r\sin\theta)2\sqrt{2}rdrd\theta = 2\pi\sqrt{2}$$

Ejemplo 7.41 *Ilustrar el teorema de Green si* $f(x,y) = (2xy - x^2, x+y^2) = P(x,y)i + Q(x,y)j$ *y* C *es el contorno del gráfico de* $y = x^2$, $x = y^2$ *en sentido contrario a las manecillas del reloj fig 29*

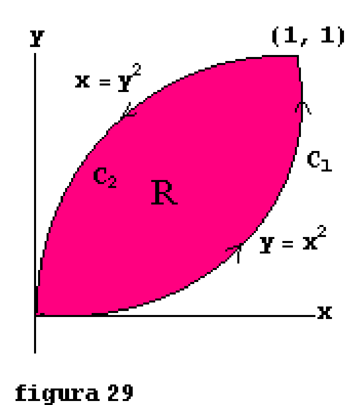


figura 29

Las parametrizaciones para C_k vienen dadas por

$$\alpha_1(t) = \left(t, t^2\right) \quad 0 \le t \le 1 \qquad \alpha_1'(t) = (1, 2t) = (dx, dy)$$

$$\alpha_2(t) = \left(t^2, t\right) \quad 0 \le t \le 1 \qquad \alpha_2'(t) = (2t, 1) = (dx, dy)$$

entonces

$$\oint_c P(x,y)dx+Q(x,y)dy = \oint_{c_1}(2xy-x^2)dx+(x+y^2)dy + \oint_{c_2}(2xy-x^2)dx+(x+y^2)dy =$$

$$= \int_0^1 \left((2t^3 - t^2 + (t + t^4)2t\right) dt - \int_0^1 \left((4t^4 - 2t^5) + 2t^2\right) dt = \frac{1}{30}.$$

$$\iint_R (\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y)\, dxdy = \iint_R (1-2x)dxdy = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (1-2x)dydx = \frac{1}{30}$$

Ejemplo 7.42 *Ilustrar el teorema de Green si* $f(x,y) = (-y/2, x/2) = P(x,y)i + Q(x,y)j$ *y* C *es el contorno del gráfico de* $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=1$ $x=0, y=0$, *en sentido contrario a las manecillas del reloj fig 30*

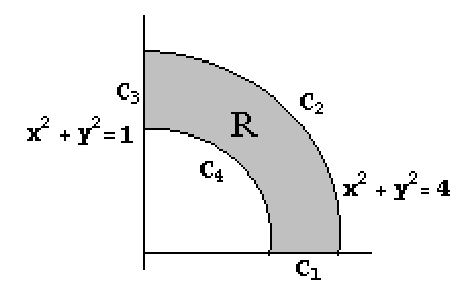


figura 30

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint_R dxdy = \int_0^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dydx + \int_1^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} dydx = \int_0^{\pi/2}\int_1^2 rdrd\theta = \frac{3}{4}\pi$$

Las parametrizaciones para C_k vienen dadas por

$$\alpha_1(t) = (t,0) \quad 1 \le t \le 2 \alpha_1'(t) = (1,0) = (dx,dy)$$
$$\alpha_2(t) = (2\cos t, 2\sin t) \quad 0 \le t \le \pi/2 \quad \alpha_2'(t) = (-2\sin t, 2\cos t) = (dx,dy)$$
$$\alpha_3(t) = (0,-t) \quad -2 \le t \le -1 \quad \alpha_3'(t) = (0,-1) = (dx,dy)$$
$$\alpha_4(t) = (\cos t, -sint) \quad -\pi/2 \le t \le 0 \quad \alpha_4'(t) = (-\sin t, -\cos t) = (dx,dy)$$

entonces

$$\oint_c P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \oint_c (-y/2)dx + (x/2)dy =$$

$$= \oint_{c_1} (-y/2)dx+(x/2)dy + \oint_{c_2} (-y/2)dx+(x/2)dy + \oint_{c_3} (-y/2)dx+(x/2)dy + \oint_{c_4} (-y/2)dx+(x/2)dy$$

$$= \int_1^2 0dt + \int_0^{\pi/2} 2dt + \int_{-2}^{-1} 0dt - \int_{-\pi/2}^{0} 1/2dt = \frac{3}{4}\pi$$

7.8 Teorema de Green generalizado.

Sea $f(x,y) = P(x,y)i + Q(x,y)j$ derivable con continuidad en un conjunto abierto y

conexo S del plano y sea $C_1 C_2 .... C_n$ curvas simples cerradas en S tales que dos curvas cualquiera de ellas no se cortan, $C_1 C_2 .... C_n$ estan en el interior de C y R es el interior de C y exterior a $C_1 C_2 .... C_n$ fig 31 entonces

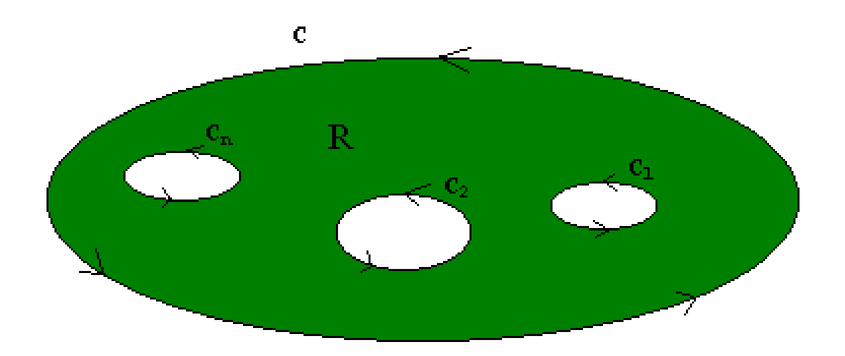


figura 31

$$\iint\limits_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint_c P(x,y)dx + Q(x,y)dy - \sum_{k=1}^{n} \oint_{c_k} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

Ejemplo 7.43 *Sea* $f(x,y) = (\frac{-y}{2}, \frac{x}{2})$ *C es el contorno del cuadrado de vértices* $(2,2), (-2,2), (-2,-2), (2,-2)$ *y* C_1 *el contorno de* $x^2 + y^2 = 1$ *fig 32 entonces*

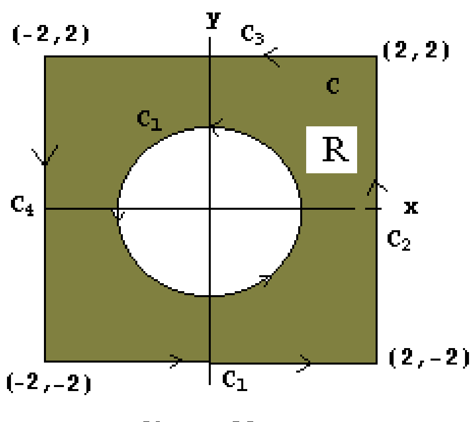


figura 32

se mostrará que

$$\iint\limits_{R}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_{c}P(x,y)dx+Q(x,y)dy-\oint_{c_1}P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

En efecto :

$$\iint\limits_{R}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\iint\limits_{R}dxdy=\int\limits_{-2}^{2}\int\limits_{-2}^{2}dydx-\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{1}rdrd\theta=16-\pi$$

Ahora se evalúan las dos integrales $\oint\limits_{C}\frac{-y}{2}dx+\frac{x}{2}dy-\oint\limits_{C_1}\frac{-y}{2}dx+\frac{x}{2}dy$

primero hallamos el valor de la integral $\oint\limits_{C_1}\frac{-y}{2}dx+\frac{x}{2}dy$. Como

$$C_1:\alpha(t)=(\cos t,\sin t)\quad 0\leq t\leq 2\pi\quad \alpha'(t)=(-\sin t,\cos t)$$

entonces

$$\oint\limits_{C_1}\frac{-y}{2}dx+\frac{x}{2}dy=\int\limits_{0}^{2\pi}((\frac{-\sin t}{2})(-\sin t)+(\frac{\cot t}{2})(\cos t))dt=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\pi}dt=\pi$$

Ahora hallamos el valor de la integral $\oint\limits_{C}\frac{-y}{2}dx+\frac{x}{2}dy$ las parametrizaciones del cuadrado son

$$\begin{aligned}C_1:\alpha_1(t)=(t,-2)\quad &\alpha_1'(t)=(1,0)\ \ -2\leq t\leq 2\\ C_2:\alpha_2(t)=(2,t)\quad &\alpha_2'(t)=(0,1)\ \ -2\leq t\leq 2\\ C_3:\alpha_1(t)=(-t,2)\quad &\alpha_3'(t)=(-1,0)\ \ -2\leq t\leq 2\\ C_4:\alpha_1(t)=(-2,-t)\quad &\alpha_4'(t)=(0,-1)\ \ -2\leq t\leq 2\end{aligned}$$

y así

$$\oint\limits_{C}\frac{-y}{2}dx+\frac{x}{2}dy=\int\limits_{-2}^{2}(1+0)dt+\int\limits_{-2}^{2}(0+1)dt+\int\limits_{-2}^{2}(1+0)dt+\int\limits_{-2}^{2}(0+1)dt=16$$

luego

$$\oint\limits_{C}\frac{-y}{2}dx+\frac{x}{2}dy-\oint\limits_{C_1}\frac{-y}{2}dx+\frac{x}{2}dy=16-\pi$$

Ejercicio 21 *Verificar la igualdad en el teorema de Green si* $f(x,y) = (-y,x)$ *y*

1. El contorno del gráfico de $|x| + |y| = 1$ recorrido una sola vez en sentido contrario de las manecillas del reloj Respuesta 4

2. El segmento de recta que une $(0,0)$ con $(1,0)$,el contorno del gráfico $y = \sqrt{1-x^2}$ desde $(1,0)$ hasta $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ y el contorno del gráfico de $y = x$ desde $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ hasta $(0,0)$ recorrido una sola vez en sentido contrario de las manecillas del reloj. Respuesta $\frac{\pi}{4}$

3. El contorno del trapecio de vértices $(0,0), (4,0), (1,3), (0,3)$ recorrido una sola vez en sentido contrario de las manecillas del reloj. Respuesta 15

4. El contorno de los gráficos de $y = x^2$ y $y = 8 - x^2$desde $(-1,1)$ hasta $(-1,1)$ recorrido una sola vez en sentido contrario de las manecillas del reloj. Respuesta $\frac{128}{3}$

5. El contorno de los gráficos $y = x, x + y = 2, y = 0$ recorrido una sola vez en sentido contrario de las manecillas del reloj. Respuesta 1

6. El contorno de los gráficos de los gràficos $x = y^2$, $x = 4$ recorrido una sola vez en sentido contrario de las manecillas del reloj. Respuesta $\frac{64}{3}$

7. Calcular la integral $\oint_C e^{2x}Sen2ydx + e^{2x}Cos2ydy$ si C es el camino sobre la gráfica de $9(x-1)^2 + 4(y-4)^2 = 16$.Respuesta cero

8. Calcular la integral $\oint_C (x^5 + 3y)dx + (2x - e^{y^3})dy$ si es el camino sobre la gráfica de $9(x-1)^2 + 4(y-4)^2 = 16$.Respuesta $\frac{-8\pi}{3}$

9. Sea R una región del plano xy, limitada por una curva simple cerrada C, verificar que $\oint_C xdy =$ Area de R

10. Sea R una región del plano xy, limitada por una curva simple cerrada C, verificar que $-\oint_C ydx =$ Area de R

11. Sea R una region del plano xy, limitada por una curva simple cerrada C, verificar que $\frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx =$ Area de R

12. Verificar $\overline{x} = \frac{1}{2A}\oint_C x^2dy$, $\overline{y} = \frac{1}{2A}\oint_C y^2dx$

13. Hallar el área del rombo de vèrtices $(6,0),(0,6)$, $(-6,0),(0,-6)$.Respuesta 72

14. Hallar el área de $r = 2\cos\theta$.Respuesta π

Capítulo 8

Superficie

8.1 Intoduccion

En este capítulo hace un estudio detallado, de lo que es una superficie, sus paramerizaciones, la integral de superficie de un campo escalar, el área de una superficie, la integral de superficie de un campo vectorial, el teorema de la Divergencia y el teorema de Stokes.

8.2 Definición de Superficie

Una superficie se define como el recorrido de una función diferenciable φ, de un subconjunto de R^2, en un subconjuto de R^3, es decir,

$\varphi : A \to B$ con $A \subseteq R^2$ y $B \subseteq R^3$ y $\varphi(u,v) = X(u,v)i + Y(u,v)j + Z(u,v)k$

a $\varphi(u,v) = X(u,v)i + Y(u,v)j + Z(u,v)k$ se dice que es una parametrización de la superficie

8.3 Algunas parametrizaciones.

1. Una parametrización para el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{es}$$

$$\varphi(u,v) = (a\cos u \sin v, b \sin u \sin v, c\cos v) \quad 0 \leq u \leq 2\pi \quad 0 \leq v \leq \pi$$

Como un caso particular si

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

se tiene que

$$\varphi(u,v)=(a\cos u\sin v, a\sin u\sin v, a\cos v) \quad 0\le u\le 2\pi,\ 0\le v\le \pi$$

es una parametrización para la superficie de la esfera de radio a, $x^2+y^2+z^2=a^2$

2. Una parametrización para la superficie de paraboloide

$$z=x^2+y^2 \quad \text{hasta} \quad z=4 \quad \text{es}$$

$$\varphi(u,v)=\left(u\cos v, u\sin v, u^2\right) \quad 0\le v\le 2\pi \quad 0\le u\le 2$$

3. Una parametrización para la superficie del cono

$$z=\sqrt{x^2+y^2} \ \text{ hasta } z=4 \ \text{ es}$$

$$\varphi(u,v)=(u\cos v, u\sin v, u) \quad 0\le v\le 2\pi \quad 0\le u\le 4$$

4. Una parametrización para la superficie del cilindro

$$x^2+y^2=9 \ \text{ desde } \ z=2 \ \text{ hasta } \ z=4 \ \text{ es}$$

$$\varphi(u,v)=(3\cos v, 3\sin v, u) \quad 0\le v\le 2\pi \quad 2\le u\le 4$$

5.En general, si la superficie se puede expresar de la forma $z=f(x,y)$, una parametrización es

$$\varphi(u,v)=(u,v,f(u,v)) \quad ó \quad \varphi(x,y)=(x,y,f(x,y))$$

y si es de la forma $x=f(y,z)$ una parametrización es

$$\varphi(y,z)=(f(y,z),y,z)$$

y si es de la forma $y=f(x,z)$ una parametrización es

$$\varphi(x,z)=(x,f(y,z),z)$$

Así, por ejemplo

$a)$ $\varphi(x,y)=(x,y,x^2+y^2)$ es una parametrización de la superficie del paraboloide $z=x^2+y^2$

$b)$ $\varphi(x,y)=\left(x,y,\sqrt{x^2+y^2}\right)$ es una parametrización la superficie del cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$

$c)$ $\varphi(x,y)=(x,y,4)$ es una parametrización la superficie del plano $z=4$

$d.\varphi(x,y)=(x,y,4-x-y)$ es una parametrización la superficie del plano $x+y+z=4$

$e.\varphi(x,y)=(x,y,x^2)$ es una parametrización de la superficie del cilindro $z=x^2$

8.4 Definición de Integral de superficie

Recordemos que la integral de linea de un campo escalar $\oint\limits_C f(x,y,z)ds$ se definió por

$$\oint\limits_C f(x,y,z)ds = \int\limits_a^b f(\alpha(t))\,||\alpha'(t)||\,dt$$

siendo $ds = ||\alpha'(t)||\,dt = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt = \sqrt{(dx)^2+(dy)^2} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$ con $\alpha(t)$ una parmetrización de la curva C. En forma muy análoga se define la integral de superficie $\iint\limits_{\varphi(A)} f(x,y,z)ds$ como

$$\iint\limits_{\varphi(A)} f(x,y,z)ds = \iint\limits_A f(\varphi(u,v))\left|\left|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\times\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right|\right|dudv$$

si $\varphi(u,v)$ es una parametrización de la superficie $\varphi(A)$

$$\iint\limits_{\varphi(A)} f(x,y,z)ds = \iint\limits_{proyxy} f(\varphi(x,y))\left|\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\times\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|\right|dxdy = \iint\limits_{proyxy} f(\varphi(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}dxdy$$

ó

$$\iint\limits_{\varphi(A)} f(x,y,z)ds = \iint\limits_{proyyz} f(\varphi(y,z))\left|\left|\frac{\partial\varphi}{\partial y}\times\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|\right|dzdy = \iint\limits_{proyyz} f(\varphi(y,z))\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}dzdy$$

ó

$$\iint\limits_{\varphi(A)} f(x,y,z)ds = \iint\limits_{proyxz} f(\varphi(x,z))\left|\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\times\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|\right|dzdx = \iint\limits_{proyyz} f(\varphi(x,z))\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}dzdx$$

si $\varphi(x,y) = (x,y,f(x,y))$, $\varphi(y,z) = (f(y,z),y,z)$ y $\varphi(x,z) = (x,f(x,z),z)$, son las parametrizaciones de las superficies $z = f(x,y)$, $x = f(y,z)$, $y = f(x,z)$ y

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\times\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right) \text{ y } \left|\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\times\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|\right| = \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} = ds$$

es decir,

$$ds = \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x} \times \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right\| dxdy = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dxdy$$

$$ds = \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial y} \times \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right\| dxdy = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} dydz$$

$$ds = \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x} \times \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right\| dxdy = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} dxdz$$

8.5 Area de una superficie

El área de la superficie se calcula por

$$\iint\limits_{\varphi(A)} ds = \iint\limits_{A} \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}\right\| dudv$$

ó por

$$\iint\limits_{\varphi(A)} ds = \iint\limits_{proyxy} \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x} \times \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right\| dxdy = \iint\limits_{proyxy} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dxdy$$

ó por

$$\iint\limits_{\varphi(A)} ds = \iint\limits_{proyyz} \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial y} \times \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right\| dzdy = \iint\limits_{proyyz} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} dzdy$$

ó por

$$\iint\limits_{\varphi(A)} ds = \iint\limits_{proyxz} \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x} \times \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right\| dzdy = \iint\limits_{proyxz} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} dxdz$$

donde proyxy significa, la proyección de la superficie en el plano xy, como se ilustrará en los próximos ejemplos

Ejemplo 8.1 *Calcular*

$$\iint\limits_{\varphi(A)} ds$$

si $\varphi(A)$ *es la superficie del plano* $x + y + 3z = 1$ *que está en el primer octante fig 34*

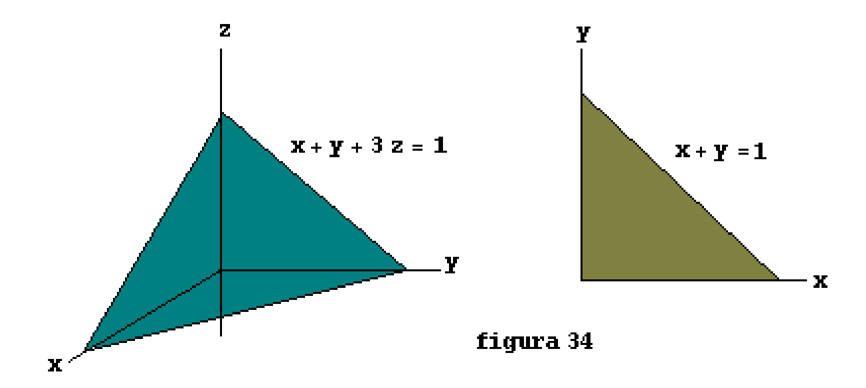


figura 34

Una parametrización de la superficie del plano $x+y+3z=1$ es

$$\varphi(x,y)=\left(x,y,\frac{1-x-y}{3}\right)\quad y\quad ds=\sqrt{1+(-\frac{1}{3})^2+(-\frac{1}{3})^2}dxdy=\sqrt{\frac{11}{9}}dxdy$$

$$\iint\limits_{\varphi(A)} ds=\int\limits_0^1\int\limits_0^{1-x}\sqrt{\frac{11}{9}}dydx=\frac{\sqrt{11}}{6}$$

Se puede calcular el área, proyectando la superficie al plano yz
y una parametrización de la superficie es

$$\varphi(y,z)=(1-y-3z,y,z)\quad ds=\sqrt{1+(-1)^2+(-3)^2}dydz=\sqrt{11}dydz \text{ luego}$$

$$\iint\limits_{\varphi(A)} ds=\int\limits_0^{1/3}\int\limits_0^{1-3z}\sqrt{11}dydz=\frac{\sqrt{11}}{6}$$

y en forma análoga se puede calcular el área, proyectando la superficie al plano xz

Ejemplo 8.2 *Calcular*

$$\iint\limits_{\varphi(A)} zds$$

$\varphi(A)$ *es la superficie del paraboloide* $z=x^2+y^2$ *hasta* $z=9$ *fig 35*

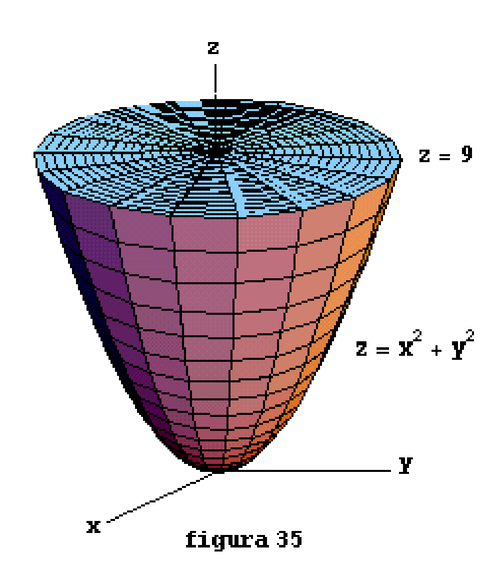


figura 35

$$\varphi(x,y) = \left(x, y, x^2+y^2\right) \quad ds = \sqrt{1+(2x)^2+(2y)^2}dxdy = \sqrt{1+4(x^2+y^2)}dxdy \text{ y}$$

$$f\left(\varphi(x,y)\right) = f\left(x,y,x^2+y^2\right) = x^2+y^2 \text{ por lo tanto}$$

$$\iint\limits_{\varphi(A)} zds = \int\limits_{-3}^{3}\int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \left(x^2+y^2\right)\sqrt{1+4(x^2+y^2)}dydx = \int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{3} r^3\sqrt{1+4r^2}drd\theta = \frac{1961}{60}\pi\sqrt{37}+\frac{1}{60}\pi$$

Luego se puede concluir que el área de $\varphi(A)$, la superficie del paraboloide $z = x^2+y^2$ hasta $z = 9$ viene dada por

$$\iint\limits_{\varphi(A)} ds = \int\limits_{-3}^{3}\int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \sqrt{1+4(x^2+y^2)}dydx = \int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{3} r\sqrt{1+4r^2}drd\theta = \pi\left(\frac{37}{6}\sqrt{37}-\frac{1}{6}\right)$$

Ejemplo 8.3 *Calcular*

$$\iint\limits_{\varphi(A)} (x+y+z)\,ds$$

$\varphi(A)$ *es la superficie del rectángulo que tiene por vértices* $(0,0,0), (2,0,0), (2,3,0), (0,3,0)$ *fig 36*

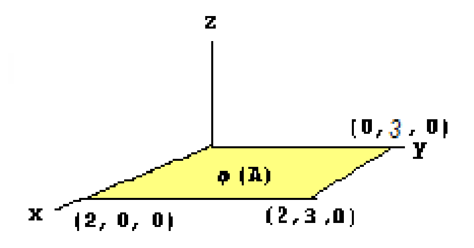


figura 36

$$\varphi(x,y) = (x,y,0)\,, \quad ds = \sqrt{1+(0)^2+(0)^2}dxdy = dxdy$$
$$f\left(\varphi(x,y)\right) = f\left(x,y,0\right) = x+y$$

entonces

$$\iint\limits_{\varphi(A)} (x+y+z)\,ds = \int\limits_0^2 \int\limits_0^3 (x+y)\,dydx = 15$$

Luego se puede concluir que, el área de $\varphi(A)$, de la superficie anterior viene dada por

$$\iint\limits_{\varphi(A)} ds = \int\limits_0^2 \int\limits_0^3 dydx = 6$$

Ejemplo 8.4 *Calcular*

$$\iint\limits_{\varphi(A)} (2x+yz-1)\,ds$$

$\varphi(A)$ *es la superficie de la esfera* $x^2+y^2+z^2=9$ *fig 37*

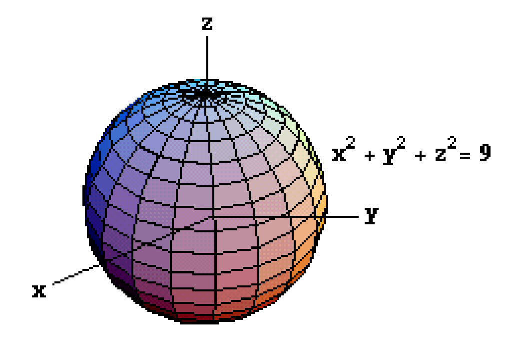


figura 37

Una parametrización de la superficie es

$$\varphi(u,v) = (3\cos u\sin v, 3\sin u\sin v, 3\cos v) \quad 0\le u\le 2\pi \quad 0\le v\le\pi \ \text{ y}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}\times\frac{\partial\varphi}{\partial v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3\sin u\sin v & 3\cos u\sin v & 0 \\ 3\cos u\cos v & 3\sin u\cos v & -3\sin v \end{vmatrix} =$$

$$= -9i\cos u\sin^2 v - 9\left(\sin u\sin^2 v\right)j - 9\left(\sin^2 u\sin v\right)k\cos v - 9\left(\cos^2 u\cos v\right)k\sin v$$

$= -9i\cos u\sin^2 v - 9j\sin u\sin^2 v - 9k\sin v\cos v$ luego

$$\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\times\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right\| = 9\sqrt{\sin^4 v\cos^2 u + \sin^4 v\sin^2 u + \sin^2 v\cos^2 v} = 9\left|\sin v\right| = 9\sin v \ \ 0\le v\le\pi$$

por lo tanto

$$\iint_{\varphi(A)} (2x+yz-1)\,ds = \iint_A (6\cos u\sin v + 9\sin u\sin v\cos v - 1)9\sin v\ dudv =$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left(54\sin^2 v\cos u + 81\sin u\sin^2 v\cos v - 9\sin v\right)dudv = -36\pi$$

La integral $\iint_{\varphi(A)} (2x+yz-1)\,ds$ se puede calcular tambien de la foma siguiente, como $z = \pm\sqrt{9-x^2-y^2}$ entonces

$$\iint_{\varphi(A)} (2x+yz-1)\,ds = \iint_{\varphi_1(A)} (2x+yz-1)\,ds + \iint_{\varphi_2(A)} (2x+yz-1)\,ds$$

con

$$\varphi_1(x,y) = \left(x, y, \sqrt{9-x^2-y^2}\right) \qquad ds_1 = \frac{3}{\sqrt{9-x^2-y^2}}dxdy$$

$$\varphi_2(x,y) = \left(x, y, -\sqrt{9-x^2-y^2}\right) \qquad ds_2 = \frac{3}{\sqrt{9-x^2-y^2}}dxdy$$

luego

$$\iint_{\varphi(A)} (2x+yz-1)\,ds = \int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\left(2x + y\sqrt{9-x^2-y^2} - 1\right)\frac{3}{\sqrt{9-x^2-y^2}}dydx +$$

$$\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\left(2x-y\sqrt{9-x^2-y^2}-1\right)\frac{3}{\sqrt{9-x^2-y^2}}dydx=-18\pi-18\pi=-36\pi$$

Ejemplo 8.5 *El área de la superficie de la esfera $x^2+y^2+z^2=9$ vine dada por*

$$\iint_{\varphi(A)} ds=\iint_{A}\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\times\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right\|dudv=\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{2\pi}9\sin v\,dudv=36\pi=$$

$$=2\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\frac{3}{\sqrt{9-x^2-y^2}}dydx=36\pi=2\int_{0}^{3}\int_{0}^{2\pi}\frac{3r}{\sqrt{9-r^2}}d\theta dr=36\pi$$

Ejemplo 8.6 *Calcular*

$$\iint_{\varphi(A)}(x+z)\,ds$$

$\varphi(A)$ la superficie del cilindro $x^2+y^2=9$ desde $z=0$ hasta $z=4$ y sus dos tapas fig 38

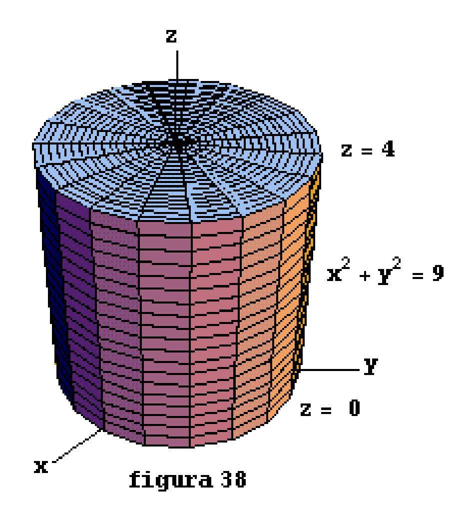


figura 38

$$\iint_{\varphi(A)}(x+z)\,ds=\iint_{\varphi_1(A)}(x+z)\,ds_1+\iint_{\varphi_2(A)}(x+z)\,ds_2+\iint_{\varphi_3(A)}(x+z)\,ds_3$$

Una parametrización para la superficie $\varphi_1(A)$, $z=4$, es $\varphi_1(x,y)=(x,y,4)$

$$ds_1=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+1}dxdy=\sqrt{(0)^2+(0)^2+1}dxdy=dxdy \text{ y}$$

$$\iint\limits_{\varphi_1(A)}(x+z)\,ds_1=\iint\limits_{x^2+y^2\leq 9}(x+4)\,dxdy=\int\limits_{-3}^{3}\int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}(x+4)\,dydx=\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{3}(r\cos\theta+4)\,rdrd\theta=36\pi$$

Una parametrización para la superficie $\varphi_2(A)$, $z=0$, es $\varphi_2(x,y)=(x,y,0)$ y

$$ds_2=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+1}dxdy=\sqrt{(0)^2+(0)^2+1}dxdy=dxdy \text{ por tanto}$$

$$\iint\limits_{\varphi_2(A)}(x+z)\,ds_2=\iint\limits_{x^2+y^2\leq 9}xdxdy=\int\limits_{-3}^{3}\int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}xdydx=\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{3}(r\cos\theta)\,rdrd\theta=0$$

Una parametrización para $\varphi_3(A)$ la superficie del cilindro es :

$$\varphi_3(u,v)=(3\cos u,3\sin u,v)\quad 0\leq u\leq 2\pi\quad 0\leq v\leq 4\quad y$$

$$\frac{\partial\varphi_3}{\partial u}\times\frac{\partial\varphi_3}{\partial v}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ -3\sin u & 3\cos u & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=(3i\cos u+3\,(\sin u)\,j+0k)$$

entonces

$$ds_3=\left\|\frac{\partial\varphi_3}{\partial u}\times\frac{\partial\varphi_3}{\partial v}\right\|dudv=\sqrt{9\cos^2 u+9\sin^2 u}dudv=3dudv$$

luego

$$\iint\limits_{\varphi_3(A)}(x+z)\,ds_3=\iint\limits_{A}(3\cos u+v)\,3dudv=3\int\limits_{0}^{4}\int\limits_{0}^{2\pi}(3\cos u+v)\,dudv=48\pi$$

La integral $\iint\limits_{\varphi_3(A)}(x+z)\,ds_3$ se puede tambien calcular de la forma siguiente : Como $x^2+y^2=9$ entonces $x=f(y,z)=\pm\sqrt{9-y^2}$ y asì

$$\varphi_3(y,z)=\left(\pm\sqrt{9-y^2},y,z\right)\quad y\quad ds_3=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2+1}dzdy=\frac{3}{\sqrt{9-y^2}}dzdy$$

$$y$$

$$\iint\limits_{\varphi_3(A)} (x+z)\, ds_3 = \int\limits_{-3}^{3}\int\limits_{0}^{4} \left(-\sqrt{9-y^2}+z\right) \frac{3}{\sqrt{9-y^2}} dzdy + \int\limits_{-3}^{3}\int\limits_{0}^{4} \left(\sqrt{9-y^2}+z\right) \frac{3}{\sqrt{9-y^2}} dzdy = 48\pi$$

$$y \iint\limits_{\varphi(A)} (x+z)\, ds = \iint\limits_{\varphi_1(A)} (x+z)\, ds_1 + \iint\limits_{\varphi_2(A)} (x+z)\, ds_2 + \iint\limits_{\varphi_3(A)} (x+z)\, ds_3 = 36\pi + 0 + 48\pi = 84\pi$$

Ejemplo 8.7 *Calcular*

$$\iint\limits_{\varphi(A)} (x+y)\, ds$$

$\varphi(A)$, *las 6 superficies que limitan la caja de vértices*

$$(0,0,0),(3,0,0),(3,4,0),(0,4,0),(0,0,1),(0,4,1),(3,4,1),(3,0,1)$$

fig 39

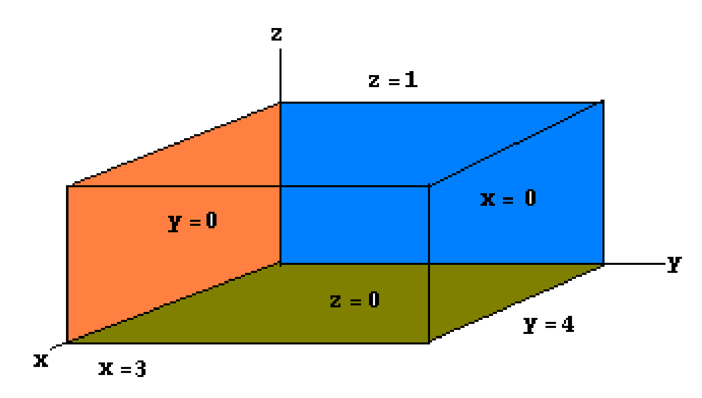


figura 39

$$\iint\limits_{\varphi(A)} (x+y)\, ds = \sum_{k=1}^{6} \iint\limits_{\varphi_k(A)} (x+y)\, ds_k$$

Una parametrización para $\varphi_1(A)$ la superficie de la tapa $z=1$ es, $\varphi_1(x,y)=(x,y,1)$

y

$$ds_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} dxdy = \sqrt{(0)^2+(0)^2+1} dxdy = dxdy$$

luego

$$\iint\limits_{\varphi_1(A)} (x+y)\, ds_1 = \int\limits_0^3 \int\limits_0^4 (x+y)\, dydx = 42$$

Una parametrización para $\varphi_2(A)$, la superficie de la tapa inferior $z = 0$ es, $\varphi_2(x, y) = (x, y, 0)$

$$ds_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} dxdy = \sqrt{(0)^2 + (0)^2 + 1} dxdy = dxdy$$

luego

$$\iint\limits_{\varphi_2(A)} (x+y)\, ds_2 = \int\limits_0^3 \int\limits_0^4 (x+y)\, dydx = 42$$

Una parametrización para $\varphi_3(A)$, la superficie de $y = f(x, z) = 4$ es, $\varphi_3(x, z) = (x, 4, z)$

$$ds_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 + 1} dxdz = \sqrt{(0)^2 + (0)^2 + 1} dxdz = dxdz$$

luego

$$\iint\limits_{\varphi_3(A)} (x+y)\, ds_3 = \int\limits_0^3 \int\limits_0^1 (x+4)\, dzdx = \frac{33}{2}$$

Una parametrización para $\varphi_4(A)$, la superficie de $y = f(x, z) = 0$ es, $\varphi_4(x, z) = (x, 0, z)$

$$ds_4 = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 + 1} dxdz = \sqrt{(0)^2 + (0)^2 + 1} dxdz = dxdz$$

luego

$$\iint\limits_{\varphi_4(A)} (x+y)\, ds_4 = \int\limits_0^3 \int\limits_0^1 xdzdx = \frac{9}{2}$$

Una parametrización para $\varphi_5(A)$,la superficie de $x = f(y, z) = 0$ es, $\varphi_5(y, z) = (0, y, z)$

$$ds_5 = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 + 1} dydz = \sqrt{(0)^2 + (0)^2 + 1} dydz = dydz$$

luego

$$\iint\limits_{\varphi_5(A)} (x+y)\,ds_5 = \int_0^4 \int_0^1 ydzdy = 8$$

Una parametrización para $\varphi_6(A)$, la superficie de $x = f(y,z) = 3$ es, $\varphi_6(y,z) = (3, y, z)$

$$ds_6 = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 + 1}dydz = \sqrt{(0)^2 + (0)^2 + 1}dydz = dydz$$

luego

$$\iint\limits_{\varphi_6(A)} (x+y)\,ds_6 = \int_0^4 \int_0^1 (3+y)dzdy = 20$$

entonces

$$\iint\limits_{\varphi(A)} (x+y)\,ds = \sum_{k=1}^{6} \iint\limits_{\varphi_k(A)} (x+y)\,ds_k = 42 + 42 + 33/2 + 9/2 + 8 + 20 = 133$$

El área de la superficie del ejemplo anterior es

$$\iint\limits_{\varphi(A)} ds = \sum_{k=1}^{6} \iint\limits_{\varphi_k(A)} ds_k =$$

$$= \int_0^3 \int_0^4 dydx + \int_0^3 \int_0^4 dydx + \int_0^3 \int_0^1 dzdx + \int_0^3 \int_0^1 dzdx + \int_0^4 \int_0^1 dzdy + \int_0^4 \int_0^1 dzdy = 38$$

Ejemplo 8.8 *Hallar el área de la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ que està dentro del cilindro $x^2 + y^2 = y$ fig 40*

Se calculará el área de la parte superior y se multiplicará por dos, es decir, como $z = f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ entonces

$$\varphi(x,y) = \left(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}\right),\ ds = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}dxdy = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}dydx$$

$$Area = 2\iint\limits_{\varphi(A)} ds = 2\iint\limits_{x^2+y^2\leq\ y} \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dydx = 2\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{\sin\theta}\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}drd\theta = 2\pi - 4$$

Ejemplo 8.9 *Hallar el área de la superficie del cono* $z = \sqrt{x^2+y^2}$ *cortada por el cilindro*

$$(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2 \quad \varphi(x,y) = \left(x, y, \sqrt{x^2+y^2}\right)$$

$$ds = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}dxdy = \sqrt{\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right) + \left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right) + 1}dxdy = \sqrt{2}dxdy$$

$$Area = 2\iint\limits_{\varphi(A)} ds = 2\iint\limits_{\varphi(A)}\sqrt{2}dxdy = 2\sqrt{2}\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}\int\limits_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} rdrd\theta = \sqrt{2}$$

Ejemplo 8.10 *Calcular*

$$\iint\limits_{\varphi(A)} x^2 z ds$$

$\varphi(A)$ *la superficie del cono* $z = \sqrt{x^2+y^2}$ *que se encuentra entre los planos* $z = 1$ *y* $z = 2$ *fig 42*

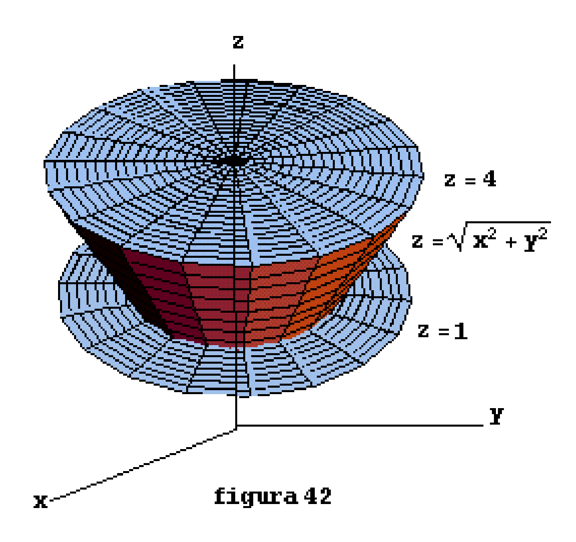


figura 42

Una parametrización para la superficie del cono

$$z = f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \ es \quad \varphi(x,y) = \left(x, y, \sqrt{x^2+y^2}\right) \quad y$$

$$ds = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}dxdy = \sqrt{\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right) + \left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right) + 1}dxdy = \sqrt{2}dxdy$$

luego

$$\iint\limits_{\varphi(A)} x^2 z ds = \iint\limits_{proyxy} x^2\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{2}dxdy = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_1^4 (r\cos\theta)^2 r^2\sqrt{2}drd\theta = \frac{1023}{5}\pi\sqrt{2}$$

ó

$$\iint\limits_{\varphi(A)} x^2 z ds = \iint\limits_{x^2+y^2\leq 4} x^2\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{2}dxdy - \iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} x^2\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{2}dxdy =$$

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^4 (r\cos\theta)^2 r^2\sqrt{2}drd\theta - \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 (r\cos\theta)^2 r^2\sqrt{2}drd\theta = \frac{1023}{5}\pi\sqrt{2}$$

El área se la superficie anterior es

$$A = \iint\limits_{\varphi(A)} ds = \iint\limits_{proyxy} \sqrt{2}dxdy = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_1^4 r\sqrt{2}drd\theta = 15\pi\sqrt{2}$$

ó

$$A = \iint\limits_{\varphi(A)} ds = \iint\limits_{x^2+y^2\leq 4} \sqrt{2}dxdy - \iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} \sqrt{2}dxdy = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^4 r\sqrt{2}drd\theta - \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 r\sqrt{2}drd\theta = 15\pi\sqrt{2}.$$

Ejemplo 8.11 *Hallar el área de la superficie del paraboloide* $z = 11 - x^2 - y^2$ *para* $z \geq 2$

fig 43

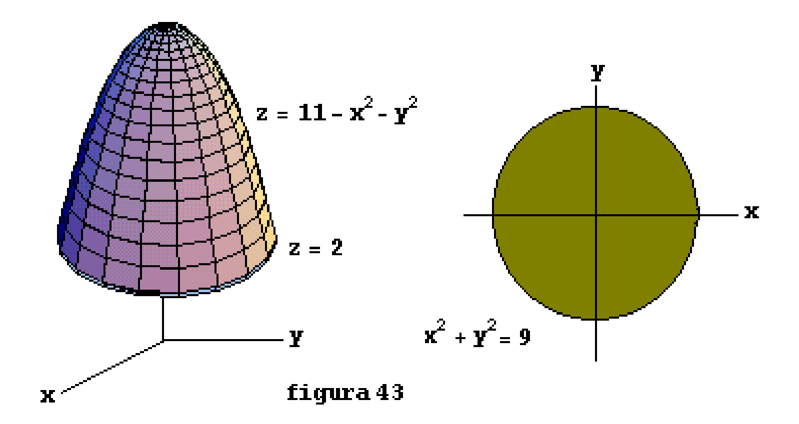


figura 43

Una parametrización para la superficie del paraboloide $z = f(x, y) = 11 - x^2 - y^2$ es

$$\varphi(x, y) = \left(x, y, 11 - x^2 - y^2\right)$$

$$ds = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}dxdy = \sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}dxdy$$

luego

$$\iint\limits_{\varphi(A)} ds = \iint\limits_{x^2+y^2 \leq 9} \sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}dxdy = \int_{-3}^{3} \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} (\sqrt{4(x^2 + y^2) + 1})dydx =$$

$$= \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{3} \sqrt{4r^2 + 1}rdrd\theta = \frac{37}{6}\pi\sqrt{37} - \frac{1}{6}\pi$$

Ejemplo 8.12 *Hallar el área de la superficie del cono* $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ *que está dentro de la esfera* $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ *fig 44. Una parametrización para la superficie del cono* $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ *es*

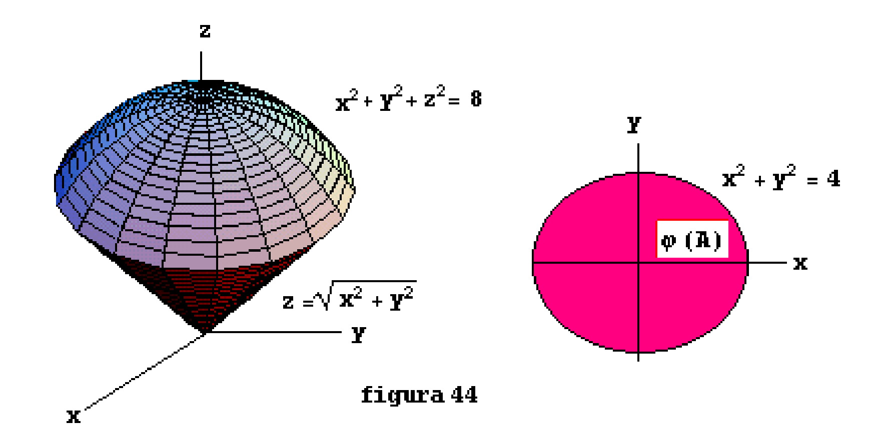


figura 44

$$\varphi(x,y)=\left(x,y,\sqrt{x^2+y^2}\right) \qquad y \quad ds=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+1}dxdy=\sqrt{2}dxdy$$

luego

$$\iint\limits_{\varphi(A)} ds=\iint\limits_{x^2+y^2\leq 4}\sqrt{2}dxdy=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\sqrt{2}dydx=\int_0^{2\pi}\int_0^2\sqrt{2}rdrd\theta=4\pi\sqrt{2}$$

Ejemplo 8.13 *Hallar el área de la superficie del paraboloide $z=x^2+y^2$ que se encuentra fuera del cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$. Como $z=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{z}$ entonces $z^2=z$, es decir,*

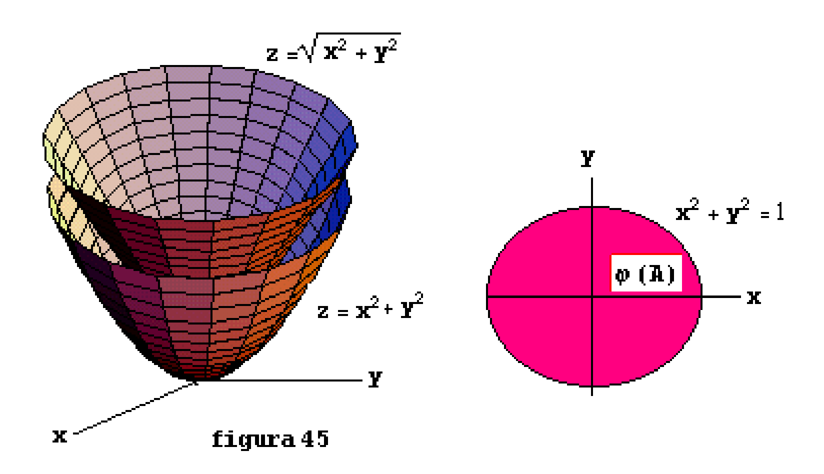


figura 45

$z^2-z=0$, luego $z=0$ *y* $z=1$, entonces $x^2+y^2=1$, es la proyecciòn en el plano xy. Una parametrización para la superficie del paraboloide

$$z=f(x,y)=x^2+y^2 \quad es \quad \varphi(x,y)=\left(x,y,x^2+y^2\right) \qquad y$$

$$ds = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}dxdy = \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}dxdy$$

luego

$$\iint_{\varphi(A)} ds = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1 + 4r^2}rdrd\theta = \frac{5}{6}\pi\sqrt{5} - \frac{1}{6}\pi$$

Ejemplo 8.14 *Hallar el área de la superficie*

$$z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

que está dentro del cilindro

$$x^2 + y^2 = 1.$$

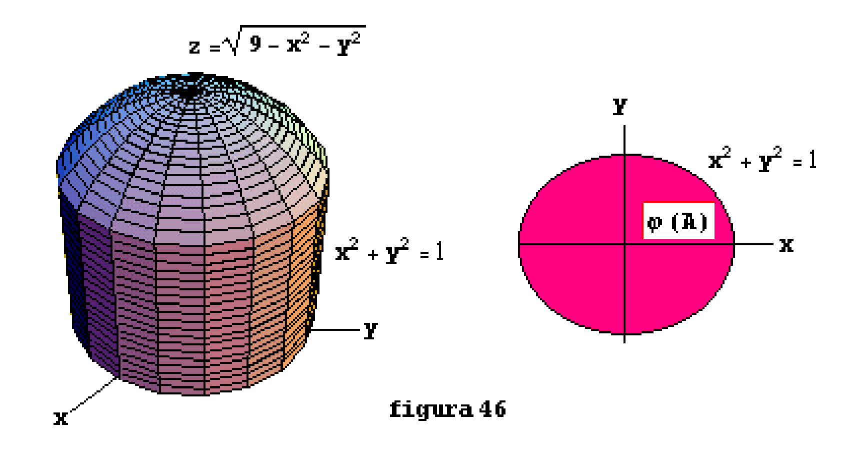


figura 46

Una parametrización para la superficie

$$z = f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2} \quad \text{es}$$

$$\varphi(x, y) = \left(x, y, \sqrt{9 - x^2 - y^2}\right) \quad y \quad ds = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}dxdy = \frac{3}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}dydx$$

por lo tanto

$$A = \iint_{\varphi(A)} ds = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{3}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{3}{\sqrt{9 - r^2}}rdrd\theta = \frac{6\pi}{3 + 2\sqrt{2}}$$

Ejercicio 22 *Aplicar la teoria*

1. Calcular la integral $\iint\limits_{\varphi(A)}(z+x)ds$ siendo $\varphi(A)$ la superficie del paraboloide $2z = x^2+y^2$ que se encuentra dentro del cilindro $x^2+y^2=4$ y halle el área de $\varphi(A)$ Respuesta $\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2}\left(\frac{r^2}{2}+r\cos\theta\right)\sqrt{r^2+1}rdrd\theta$, $\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2}\sqrt{r^2+1}rdrd\theta$.

2. Calcular la integral $\iint\limits_{\varphi(A)} zds$ siendo $\varphi(A)$ la superficie del paraboloide $z = 9-x^2-y^2$ que se encuentra dentro del cilindro $x^2+y^2=2y$ y halle el área de $\varphi(A)$. Respuesta $\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\sin\theta}(9-r^2)\sqrt{4r^2+1}rdrd\theta$, $\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\sin\theta}\sqrt{4r^2+1}rdrd\theta$.

3. Calcular la integral $\iint\limits_{\varphi(A)} yds$ siendo $\varphi(A)$ la superficie del cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$ que está dentro del paraboloide $z=x^2+y^2$ y halle el área de $\varphi(A)$.
spuesta $\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{1}(r\sin\theta)\sqrt{2}rdrd\theta$, $\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{1}\sqrt{2}rdrd\theta$

4. Calcular la integral $\iint\limits_{\varphi(A)} zds$ siendo $\varphi(A)$ la superficie del paraboloide $z=x^2+y^2$ que está fuera del cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$ y halle el área de $\varphi(A)$.
spuesta $\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{1}r^2\sqrt{4r^2+1}rdrd\theta$, $\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{1}\sqrt{4r^2+1}rdrd\theta$

5. Calcular la integral $\iint\limits_{\varphi(A)}(x+y+z)\,ds$ siendo $\varphi(A)$ la superficie de la esfera $x^2+y^2+z^2=4$ que está dentro del cilindro $x^2+y^2=1$ y halle el área de $\varphi(A)$. Respuesta

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{1}\left(r\cos\theta+r\sin\theta+\sqrt{4-r^2}\right)\frac{2}{\sqrt{4-r^2}}rdrd\theta+$$

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{1}\left(r\cos\theta+r\sin\theta-\sqrt{4-r^2}\right)\frac{2}{\sqrt{4-r^2}}rdrd\theta,\quad 2\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{1}\frac{2}{\sqrt{4-r^2}}rdrd\theta$$

6. Calcular la integral $\iint\limits_{\varphi(A)} ds$ siendo $\varphi(A)$ la superficie del plano $x+y+z=4$ que se encuentra en el primer octante. Respuesta $\int\limits_0^{4}\int\limits_0^{4-x}\sqrt{3}dydx$

7. Calcular la integral $\iint\limits_{\varphi(A)} ds$ siendo $\varphi(A)$ la superficie del plano $x+y+z=4$ que se encuentra en el interior del cilindro $x^2+y^2=1$ Respuesta $\int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{3}rdrd\theta$.

8. Un sólido está limitado por las superficies $z=1, z=3$ y entre las superficies $4=x^2+y^2$ y $1=x^2+y^2$, hallar el área que limita al sólido. Respuesta $2\int_0^{2\pi}\int_1^2 rdrd\theta+12\pi$

9. Un sólido esta limitado por la superficie $z=0$ y entre las superficies $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ y $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$, hallar el área que limita al sólido. Respuesta $\int_0^{2\pi}\int_1^2 rdrd\theta+\int_0^{2\pi}\int_0^2 \frac{2}{\sqrt{4-r^2}}rdrd\theta+\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-r^2}}rdrd\theta$

10. Un sólido esta limitado por las superficies $x+y+z=40$, $x^2+y^2=1, z=0$, hallar el área que limita al sólido. Respuesta $\int_0^{2\pi}\int_0^1 rdrd\theta+\int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{3}rdrd\theta+\int_0^{2\pi}\int_0^{40-\cos t-\sin t} dtd\theta$

11. Un sólido esta limitado por las superficies $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $x^2+y^2+z^2=8$, (interior al cono), hallar el área que limita al sólido. Respuesta $\int_0^{2\pi}\int_0^2 \sqrt{2}rdrd\theta+\int_0^{2\pi}\int_0^2 \sqrt{\frac{8}{8-r^2}}rdrd\theta$

12. Un sólido esta limitado por las superficies $x^2+y^2+z^2=8$, $z^2=x^2+y^2$, (exterior al cono), hallar el área que limita al sólido.
spuesta $2\int_0^{2\pi}\int_0^2 \sqrt{2}rdrd\theta+2\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{8}} \sqrt{\frac{8}{8-r^2}}rdrd\theta-2\int_0^{2\pi}\int_0^2 \sqrt{\frac{8}{8-r^2}}rdrd\theta$

13. Un sólido esta limitado por las superficies $z=0$, $z=1+x$ $x^2+y^2=1$, hallar el área que limita al sólido. Respuesta $\int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{2}rdrd\theta+\int_0^{2\pi}\int_0^1 rdrd\theta+\int_0^{2\pi}\int_0^{1+\cos\theta} drd\theta$

14. Un sólido esta limitado por las superficies $z=\sqrt{8-x^2-y^2}$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$, hallar el área que limita al sólido. Respuesta $\int_0^{2\pi}\int_0^2 \sqrt{2}rdrd\theta+\int_0^{2\pi}\int_0^2 \sqrt{\frac{8}{8-r^2}}rdrd\theta$

15. Un sólido esta limitado por las superficies $x^2+y^2+z^2=4$, $z=1$, para $z\geq 1$, hallar el área que limita al sólido. Respuesta $\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} rdrd\theta+\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{4}{4-r^2}}rdrd\theta$

16. Un sólido esta limitado por las superficies $x^2+y^2+z^2=4$, $z=1$, para $z\leq 1$, hallar el área que limita al sólido. Respuesta $\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\sqrt{3}} rdrd\theta+\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2}\sqrt{\dfrac{4}{4-r^2}}rdrd\theta+\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\sqrt{3}}^{2}\sqrt{\dfrac{4}{4-r^2}}rdrd\theta$

17. Un sólido esta limitado por las superficies $x^2+y^2+z^2=25$, $z=1, z=3$, hallar el área que limita al sólido
Respuesta $\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_4^{\sqrt{24}}\sqrt{\dfrac{25}{25-r^2}}rdrd\theta+\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\sqrt{24}} rdrd\theta+\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{4} rdrd\theta$

8.6 Integral de superficie de campos vectoriales.

Sea $\varphi(A)$ una superficie con parametrización $\varphi(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$ diferenciable, definida en una región A del plano uv . n un vector normal unitario a la superficie $\varphi(A)$ en el punto $\varphi(u,v)$. F : $R^3\rightarrow R^3$ un campo vectorial definido y acotado en $\varphi(A)$ .Llamamos integral de superficie del campo F sobre $\varphi(A)$, a la integral de superficie del campo escalar $F\cdot n$ ds sobre $\varphi(A)$, notada y definida por :

$$\iint\limits_{\varphi(A)} F\cdot nds=\iint\limits_{A} F(\varphi(u,v))\cdot\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial u}\times\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{\left|\left|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\times\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right|\right|}\left|\left|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\times\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right|\right|dudv$$

si n es un vector normal y unitaro en la direcciòn de $\frac{\partial\varphi}{\partial u}\times\frac{\partial\varphi}{\partial v}$

$$\iint\limits_{\varphi(A)} F\cdot nds=-\iint\limits_{A} F(\varphi(u,v))\cdot\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial u}\times\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{\left|\left|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\times\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right|\right|}\left|\left|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\times\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right|\right|dudv$$

si n es un vector normal unitaro y opuesto a $\frac{\partial\varphi}{\partial u}\times\frac{\partial\varphi}{\partial v}$

ó

$$\iint\limits_{\varphi(A)} F\cdot nds=\iint\limits_{proyxy} F(\varphi(x,y))\cdot\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}\times\frac{\partial\varphi}{\partial y}}{\left|\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\times\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|\right|}\left|\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\times\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|\right|dxdy=$$

$$=\iint\limits_{proyxy} F(\varphi(x,y))\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}\times\frac{\partial\varphi}{\partial y}dxdy$$

ó

$$\iint\limits_{\varphi(A)} F\cdot nds=\iint\limits_{proyxz} F(\ \varphi(x,z))\ \cdot\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}\times\frac{\partial\varphi}{\partial z}}{\left|\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\times\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|\right|}\left|\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\times\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|\right|dxdz=$$

$$=\iint\limits_{proyxz} F(\ \varphi(x,z))\ \cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}\times\frac{\partial\varphi}{\partial z}dxdz$$

ó

$$\iint\limits_{\varphi(A)} F\cdot nds=\iint\limits_{proyyz} F(\ \varphi(y,z))\ \cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}\times\frac{\partial\varphi}{\partial z}dydz$$

8.7 Teorema de la divergencia .

Sea $F(x,y,z)=P(x,y,z)i+Q(x,y,z)j+R(x,y,z)k$ un campo vectorial diferenciable

con continuidad en un sólido S cerrado y acotado de R^3 $\varphi(A)$ la superficie que limita al sólido, n un vector normal unitario y exterior a $\varphi(A)$, entonces

$$\iint\limits_{\varphi(A)} F\cdot nds=\iint\limits_{A} F(\ \varphi(u,v))\ \cdot\frac{\partial\varphi}{\partial u}\times\frac{\partial\varphi}{\partial v}dudv=\iiint\limits_{S} divFdzdydx$$

Ejemplo 8.15 *Ilustrar el teorema de la divergencia para el campo* $F(x,y,z)=xi+yj+zk$, $\varphi(A)$ *la superficie del paraboloide* $z=x^2+y^2$ *hasta* $z=4$ *y su tapa fig 47*

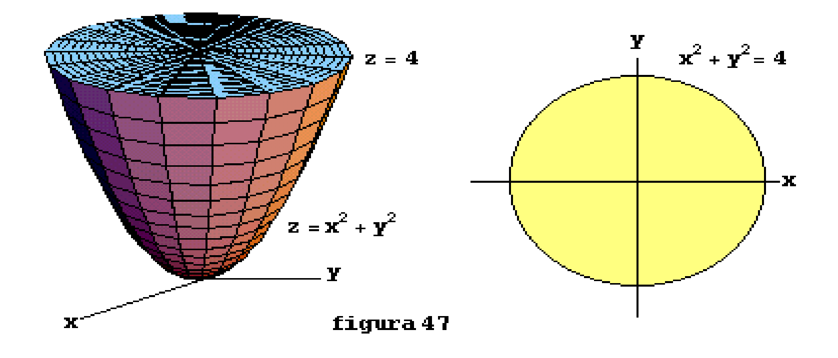


figura 47

Se mostrará que

$$\iint\limits_{\varphi(A)} F\cdot nds=\iiint\limits_{S} DivFdzdydx$$

$i.DivF = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3$ entonces

$$\iiint_S DivF dzdydx = \iiint_S 3dzdydx = 3\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{4} dzdydx = 3\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{r^2}^{4} rdzdrd\theta = 24\pi$$

$ii.$El sólido está imitado por dos superficies, la tapa $\varphi_1(A)$ la superficie del plano $z = 4$ que esta dentro del paraboloide y $\varphi_2(A)$ la superficie del paraboloide luego

$$\iint_{\varphi(A)} F \cdot nds = \iint_{\varphi_1(A)} F \cdot n_1 ds_1 + \iint_{\varphi_2(A)} F \cdot n_2 ds_2$$

Una parametrización para la superficie $\varphi_1(A), z = 4$, es $\varphi_1(x, y) = (x, y, 4)$ y un vector normal es $n = (0, 0, 1)$ entonces

$$\begin{aligned} \iint_{\varphi_1(A)} F \cdot n_1 ds_1 &= \iint_A F(x, y, 4) \cdot (0, 0, 1)dxdy = \iint_A (x, y, 4) \cdot (0, 0, 1)dxdy \\ &= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} 4dydx = 4\int_0^{2\pi}\int_0^2 rdrd\theta = 16\pi \end{aligned}$$

Otra parametrización para la superficie $\varphi_1(A)$ es

$$\varphi_1(u, v) = (u \cos v, u \sin v, 4) \quad 0 \leq v \leq 2\pi \quad 0 \leq u \leq 2 \quad \text{y}$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u \sin v & u \cos v & 0 \end{vmatrix} = uk = (0, 0, u)$$

y la integral

$$\begin{aligned} \iint_{\varphi_1(A)} F \cdot n_1 ds_1 &= \iint_A F(\varphi_1(u, v)) \cdot (0, 0, u)\, dudv = \iint_A F(u \cos v, u \sin v, 4) \cdot (0, 0, u)\, dudv \\ &= \iint_A (u \cos v, u \sin v, 4) \cdot (0, 0, u)\, dudv = \int_0^{2\pi}\int_0^2 4ududv = 16\pi \end{aligned}$$

Una parametrización para la superficie $\varphi_2(A)$, es $\varphi_2(x,y) = (x,y,x^2+y^2)$, $n_2 = (2x,2y,-1)$ entonces

$$\iint_{\varphi_2(A)} F\cdot n_2 ds_2 = \iint_A F(x,y,x^2+y^2)\cdot(2x,2y,-1)dxdy = \iint_A (x,y,x^2+y^2)\cdot(2x,2y,-1)dxdy =$$

$$= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (2x^2+2y^2-x^2-y^2)dydx = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (x^2+y^2)dydx = \int_0^{2\pi}\int_0^2 r^3 dr d\theta = 8\pi$$

Otra parametrización para la superficie $\varphi_2(A)$ es

$$\varphi_2(u,v) = \big(u\cos v, u\sin v, u^2\big) \quad 0\le v\le 2\pi \quad 0\le u\le 2.$$

$$-\frac{\partial\varphi_2}{\partial u}\times\frac{\partial\varphi_2}{\partial v} = \big(2u^2\cos v, 2u^2\sin v, -u\big)$$

es es un vector normal y exterior, luego

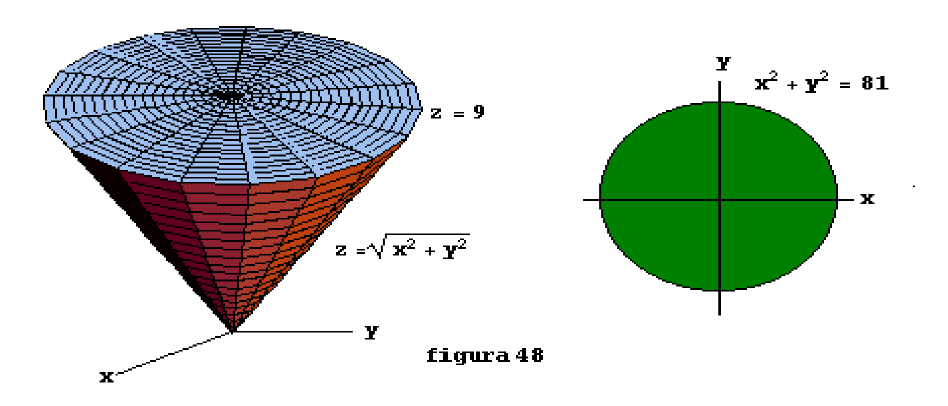
$$\iint_{\varphi_2(A)} F\cdot n_2 ds_2 = \iint_A F(u\cos v, u\sin v, u^2)\cdot\big(2u^2\cos v, 2u^2\sin v, -u\big)\,dudv =$$

$$= \iint_A (u\cos v, u\sin v, u^2)\cdot\big(2u^2\cos v, 2u^2\sin v, -u\big)\,dudv = \int_0^{2\pi}\int_0^2 u^3 dudv = 8\pi$$

así

$$\iint_{\varphi(A)} F\cdot nds = \iint_{\varphi_1(A)} F\cdot n_1 ds_1 + \iint_{\varphi_2(A)} F\cdot n_2 ds_2 = 16\pi + 8\pi = 24\pi$$

Ejemplo 8.16 *Ilustrar el teorema de la divergencia para el campo* $F(x,y,z) = xi+yj+zk$, $\varphi(A)$ *la superficie del cono* $z=\sqrt{x^2+y^2}$ *hasta* $z=9$ *y su tapa fig 48*



Se mostrará que

$$\iint\limits_{\varphi(A)} F \cdot nds = \iiint\limits_{S} DivFdzdydx$$

$i.DivF = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3$ entonces

$$\iiint\limits_{S} DivFdzdydx = \iiint\limits_{S} 3dzdydx = 3\int_{-9}^{9}\int_{-\sqrt{81-x^2}}^{\sqrt{81-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{9} dzdydx = 3\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{9}\int_{r}^{9} rdzdrd\theta = 729\pi$$

$ii.$El sólido está imitado por dos superficies, la tapa y la del cono luego

$$\iint\limits_{\varphi(A)} F \cdot nds = \iint\limits_{\varphi_1(A)} F \cdot n_1 ds_1 + \iint\limits_{\varphi_2(A)} F \cdot n_2 ds_2$$

$\varphi_1(A)$ la superficie del plano $z = 9$ que esta dentro del cono y $\varphi_2(A)$ la superficie del cono

Una parametrización para la superficie $\varphi_1(A)$ es $\varphi_1(x, y) = (x, y, 9)$, $n_1 = (0, 0, 1)$ entonces

$$\iint\limits_{\varphi_1(A)} F \cdot n_1 ds_1 = \iint\limits_{A} F(x, y, 9) \cdot (0, 0, 1)dxdy = \iint\limits_{A} (x, y, 9) \cdot (0, 0, 1)dxdy$$

$$= \int_{-9}^{9}\int_{-\sqrt{81-x^2}}^{\sqrt{81-x^2}} 9dydx = 9\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{9} rdrd\theta = 729\pi$$

Una parametrización para la superficie $\varphi_2(A)$ es :

$$\varphi_2(x, y) = \left(x, y, \sqrt{x^2 + y^2}\right),\ n_2 = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -1\right)$$

entonces

$$\iint\limits_{\varphi_2(A)} F \cdot n_2 ds_2 = \iint\limits_{A} F(x, y, \sqrt{x^2 + y^2}) \cdot (\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -1)dxdy$$

$$= \iint\limits_{A} (x, y, \sqrt{x^2 + y^2}) \cdot (\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -1)dxdy$$

$$= \int_{-9}^{9} \int_{-\sqrt{81-x^2}}^{\sqrt{81-x^2}} (\sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{x^2+y^2}) dydx = \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{9} r0drd\theta = 0$$

luego

$$\iint_{\varphi(A)} F \cdot nds = \iint_{\varphi_1(A)} F \cdot n_1 ds_1 + \iint_{\varphi_2(A)} F \cdot n_2 ds_2 = 729\pi + 0 = 729\pi$$

Ejemplo 8.17 *Ilustrar el teorema de la divergencia para el campo* $F(x, y, z) = xi + yj + zk$, $\varphi(A)$ *la superficie cerrada limitada por las 6 caras del cubo* $0 \leq x \leq 3 \quad 0 \leq y \leq 4$ $0 \leq z \leq 1$

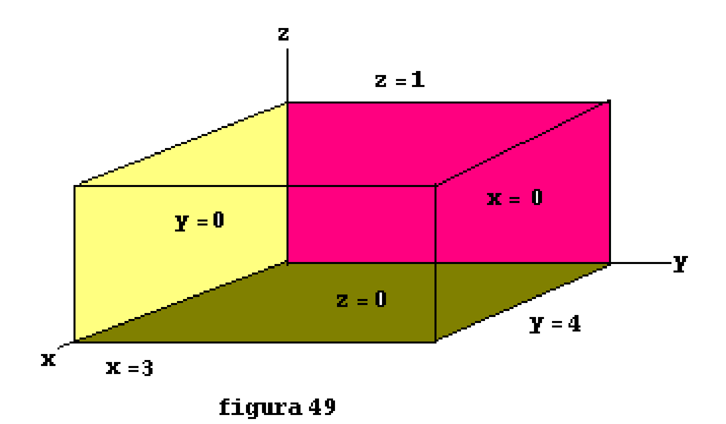


figura 49

Se mostrará que

$$\iint_{\varphi(A)} F \cdot nds = \iiint_{S} DivFdzdydx$$

i. $DivF = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3$ entonces

$$\iiint_{S} DivFdzdydx = \iiint_{S} 3dzdydx = 3 \int_{0}^{3} \int_{0}^{4} \int_{0}^{1} dzdydx = 36$$

ii.

$$\iint_{\varphi(A)} F \cdot nds = \sum_{k=1}^{6} \iint_{\varphi_k(A)} F \cdot n_k ds_k$$

Una parametrización para $\varphi_1(A)$ la superficie de la tapa $z = 1$ es $\varphi_1(x, y) = (x, y, 1)$ $n_1 = (0, 0, 1)$ luego

$$\iint_{\varphi_1(A)} F \cdot n_1 ds_1 = \int_0^3 \int_0^4 (x, y, 1) \cdot (0, 0, 1) dy dx = \int_0^3 \int_0^4 dy dx = 12$$

Una parametrización para $\varphi_2(A)$ la superficie $z = 0$ es $\varphi_2(x, y) = (x, y, 0)$ $n_2 = (0, 0, -1)$ luego

$$\iint_{\varphi_2(A)} F \cdot n_2 ds_2 = \int_0^3 \int_0^4 (x, y, 0) \cdot (0, 0, -1) dy dx = \int_0^3 \int_0^4 0 dy dx = 0$$

Una parametrización para $\varphi_3(A)$ la superficie $y = 4$ es $\varphi_3(x, z) = (x, 4, z)$ $n_3 = (0, 1, 0)$ luego

$$\iint_{\varphi_3(A)} F \cdot n_3 ds_3 = \int_0^3 \int_0^1 (x, 4, z) \cdot (0, 1, 0) dz dx = \int_0^3 \int_0^1 4 dz dx = 12$$

Una parametrización para $\varphi_4(A)$ la superficie $y = 0$ es $\varphi_4(x, z) = (x, 0, z)$ $n_4 = (0, -1, 0)$ luego

$$\iint_{\varphi_4(A)} F \cdot n_4 ds_4 = \int_0^3 \int_0^1 (x, 0, z) \cdot (0, -1, 0) dz dx = \int_0^3 \int_0^1 0 dz dx = 0$$

Una parametrización para $\varphi_5(A)$ la superficie $x = 3$ es $\varphi_5(y, z) = (3, y, z)$ $n_5 = (1, 0, 0)$ luego

$$\iint_{\varphi_5(A)} F \cdot n_5 ds_5 = \int_0^4 \int_0^1 (3, y, z) \cdot (1, 0, 0) dz dy = \int_0^4 \int_0^1 3 dz dx = 12$$

Una parametrización para $\varphi_6(A)$ la superficie $x = 0$ es $\varphi_6(y, z) = (0, y, z)$ $n_6 = (-1, 0, 0)$ luego

$$\iint_{\varphi_6(A)} F \cdot n_6 ds_6 = \int_0^4 \int_0^1 (0, y, z) \cdot (-1, 0, 0) dz dy = \int_0^4 \int_0^1 0 dz dx = 0$$

luego

$$\iint\limits_{\varphi(A)} F\cdot nds=\sum_{k=1}^{6}\iint\limits_{\varphi_k(A)} F\cdot nds_k=12+0+12+0+12+0=36$$

Ejemplo 8.18 *Ilustrar el teorema de la divergencia para el campo* $F(x,y,z)=xi+yj+zk$ *,* $\varphi(A)$ *la superficie del del paraboloide* $z=10-x^2-y^2$ *para* $z\geq 1$ *y su tapa* $z=1$ *fig 50*

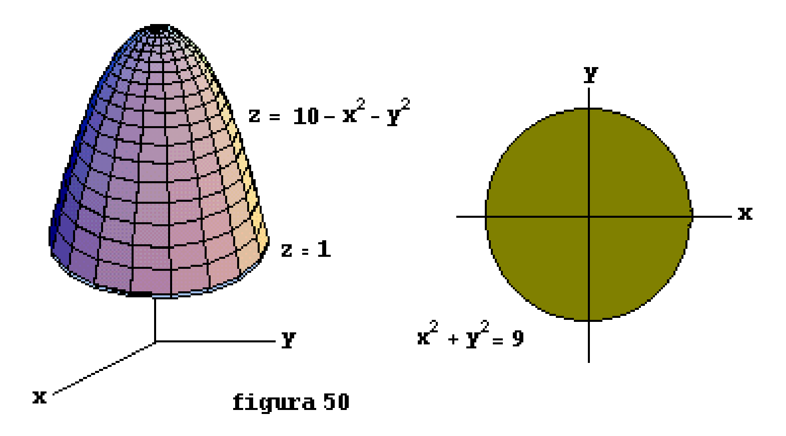


figura 50

Se mostrará que

$$\iint\limits_{\varphi(A)} F\cdot nds=\iiint\limits_{S} DivFdzdydx$$

$i.DivF=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=1+1+1=3$ entonces

$$\iiint\limits_{S} DivFdzdydx=\iiint\limits_{S} 3dzdydx=3\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{1}^{10-x^2-y^2} dzdydx=3\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{3}\int_{1}^{10-r^2} rdzdrd\theta=\frac{243}{2}\pi$$

$ii.$El sólido está imitado por dos superficies, la tapa y la del paraboloide, luego

$$\iint\limits_{\varphi(A)} F\cdot nds=\iint\limits_{\varphi_1(A)} F\cdot n_1ds_1+\iint\limits_{\varphi_2(A)} F\cdot n_2ds_2$$

$\varphi_1(A)$ la superficie del plano $z=1$ que esta dentro del paraboloide y $\varphi_2(A)$ la superficie del paraboloide. Una parametrizaciòn para la superficie $\varphi_1(A)$ es $\varphi_1(x,y)=(x,y,1)$ $n=(0,0,-1)$ entonces

$$\iint\limits_{\varphi_1(A)} F\cdot n_1 ds_1 = \iint\limits_{x^2+y^2\leq 9} F(x,y,1)\cdot(0,0,-1)dxdy = \iint\limits_{x^2+y^2\leq 9} (x,y,1)\cdot(0,0,-1)dxdy$$

$$= -\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} dydx = -\int_0^{2\pi}\int_0^3 rdrd\theta = -9\pi$$

Una parametrización para $\varphi_2(A)$ la superficie $z = 10 - x^2 - y^2$ es $\varphi_2(x,y) = (x,y,10-x^2-y^2)$ $n_2 = (2x,2y,1)$ luego

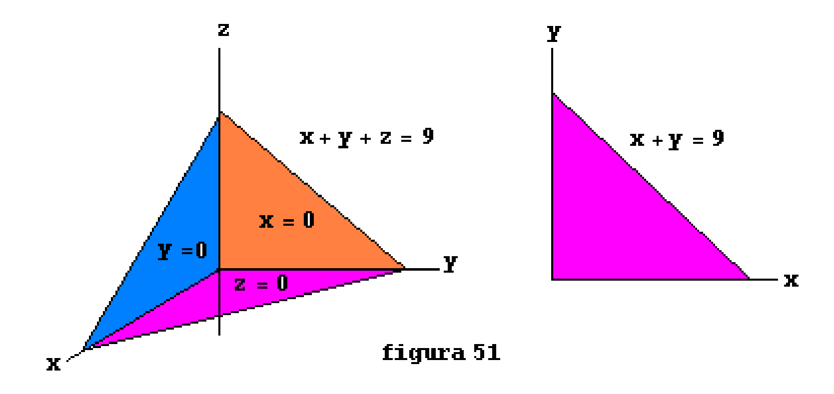
$$\iint\limits_{\varphi_2(A)} F\cdot n_2 ds_2 = \iint\limits_{x^2+y^2\leq 9} F(x,y,10-x^2-y^2)\cdot(2x,2y,1)dxdy = \iint\limits_{x^2+y^2\leq 9} (x,y,10-x^2-y^2)\cdot(2x,2y,1)dxdy$$

$$= \int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} (x^2+y^2+10)dydx = \int_0^3\int_0^{2\pi} r(r^2+10)d\theta dr = \frac{261}{2}\pi$$

entonces

$$\iint\limits_{\varphi(A)} F\cdot nds = \iint\limits_{\varphi_1(A)} F\cdot nds_1 + \iint\limits_{\varphi_2(A)} F\cdot nds_2 = -9\pi + \frac{261}{2}\pi = \frac{243}{2}\pi$$

Ejemplo 8.19 *Ilustrar el teorema de la divergencia para el campo* $F(x,y,z) = xi+yj+zk$ *,* $\varphi(A)$ *la superficie del plano* $x+y+z=9, x=0$ *,* $y=0, z=0$ *(cerrada)*



Se mostrará que

$$\iint\limits_{\varphi(A)} F\cdot nds = \iiint\limits_{S} DivF dzdydx$$

$i.DivF = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 1+1+1 = 3$ entonces

$$\iiint\limits_{S} DivF dzdydx = \iiint\limits_{S} 3dzdydx = 3\int_0^9 \int_0^{9-x} \int_0^{9-x-y} dzdydx = \frac{729}{2}$$

$ii.$El sólido está imitado por cuatro superficies, luego

$$\iint\limits_{\varphi(A)} F\cdot nds = \iint\limits_{\varphi_1(A)} F\cdot n_1 ds_1 + \iint\limits_{\varphi_2(A)} F\cdot n_2 ds_2 + \iint\limits_{\varphi_3(A)} F\cdot n_3 ds_3 + \iint\limits_{\varphi_4(A)} F\cdot n_4 ds_4$$

sea $\varphi_1(A)$ la superficie del plano $z=0.$ y una parametrización es $\varphi_1(x,y) = (x,y,0)$

$n_1 = (0,0,-1)$, entonces

$$\iint\limits_{\varphi_1(A)} F\cdot n_1 ds_1 = \iint\limits_{proyxy} F(x,y,0)\cdot(0,0,-1)dydx = \int_0^9 \int_0^{9-x} (x,y,0)\cdot(0,0,-1)dydx = \int_0^9 \int_0^{9-x} 0dydx = 0.$$

Una parametrización para la superficie $\varphi_2(A)$, $y=0$ es, $\varphi_2(x,z) = (x,0,z)$ y $n_2 = (0,-1,0)$ entonces

$$\iint\limits_{\varphi_2(A)} F\cdot n_2 ds_2 = \iint\limits_{proyxz} F(x,0,z)\cdot(0,-1,0)dxdz = \int_0^9 \int_0^{9-x} (x,0,z)\cdot(0,-1,0)dxdz = \int_0^9 \int_0^{9-x} 0dzdx = 0.$$

Una parametrización para la superficie $\varphi_3(A)$ $x=0$ es $\varphi_3(y,z) = (0,y,z)$ $n_3 = (-1,0,0)$ entonces

$$\iint\limits_{\varphi_3(A)} F\cdot n_3 ds_3 = \int_0^9 \int_0^{9-y} (0,y,z)\cdot(-1,0,0)dzdy = \int_0^9 \int_0^{9-y} 0dzdy = 0.$$

Una parametrización para la superficie $\varphi_4(A)$ $x+y+z=9$ es $\varphi_4(x,y) = (x,y,9-x-y)$ $n_4 = (1,1,1)$ entonces

$$\iint\limits_{\varphi_4(A)} F\cdot n_4 ds_4 = \int_0^9 \int_0^{9-x} (x,y,9-x-y)\cdot(1,1,1)dxdz = \int_0^9 \int_0^{9-x} 9dzdx = \frac{729}{2}$$

luego

$$\iint\limits_{\varphi(A)} F\cdot nds = \iint\limits_{\varphi_1(A)} F\cdot n_1ds_1+\iint\limits_{\varphi_2(A)} F\cdot n_2ds_2+\iint\limits_{\varphi_3(A)} F\cdot n_3ds_3+\iint\limits_{\varphi_4(A)} F\cdot n_4ds_4 = 0+0+0+\frac{729}{2}$$

8.8 Teorema de stokes.

Sea $F(x,y,z) = P(x,y,z)i+Q(x,y,z)j+R(x,y,z)k$ un campo vectorial diferenciable con continuidad, definido y acotado en una superficie $\varphi(A)$ no necesariamente cerrada, n un vector normal unitario exterior a $\varphi(A)$ y C la curva frontera orientada entonces

$$\iint\limits_{\varphi(A)} RotF\cdot nds = \iint\limits_{\varphi(A)}(\nabla\times F)\cdot nds = \oint\limits_C F\cdot d\alpha = \oint\limits_C P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$$

Ejemplo 8.20 *Sea* $F(x,y,z) = (3y,-xz,yz^2)$ $\varphi(A)$ *la superficie del plano* $z=3$ *que está dentro del cilindro* $x^2+y^2=16$ *fig 52 verifique que :*

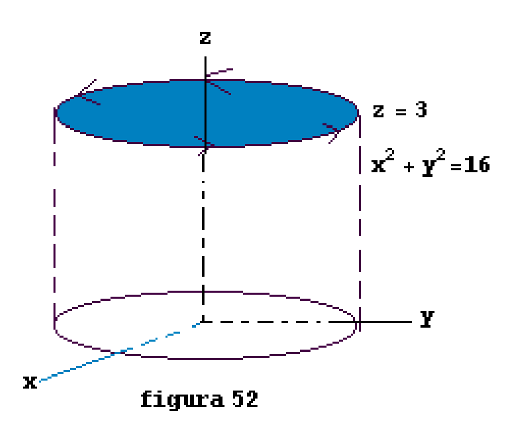


figura 52

$$\iint\limits_{\varphi(A)}(\nabla\times F)\cdot nds = \oint\limits_C F\cdot d\alpha = \oint\limits_C P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz = \oint\limits_C 3ydx-xzdy+yz^2dz$$

Recuerde que $RotF = (\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}) = (z^2+x,0,-z-3)$, como $z=3$ entonces $n=(0,0,1)$.Una parametrización para la superficie $z=3$ es $\varphi(x,y)=(x,y,3)$ y así

i)

$$\iint\limits_{\varphi(A)}(\nabla\times\ F)\cdot nds = \iint\limits_{\varphi(A)}(z^2+x,0,-z-3)\cdot nds = \iint\limits_{x^2+y^2\leq\ 16}(9+x,0,-3-3)\cdot(0,0,1)dxdy$$

$$\int_{-4}^{4}\int_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} -6dydx = \int_{0}^{4}\int_{0}^{2\pi} -6rd\theta dr = -96\pi$$

ii) Una parametrización de la curva C es $\alpha(t) = (4\cos t, 4\sin t, 3) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$
$\alpha'(t) = (-4\sin t, 4\cos t, 0)$ entonces

$$\oint_C 3ydx - xzdy + yz^2dz = \int_0^{2\pi} (3(4sint)(-4sint) - (4cost)(12cost) + 0)dt = -\int_0^{2\pi} 48dt = -96\pi$$

y así

$$\iint_{\varphi(A)} (\nabla \times \ F) \cdot nds = \oint_C 3ydx - xzdy + yz^2dz$$

Ejemplo 8.21 *Sea* $F(x, y, z) = (x, -xz, z) = (P, Q, R)$, $\varphi(A)$ *la superficie del plano* $x + y + z = 1$ *que se encuentra en el primer octante fig 53, verifique que :*

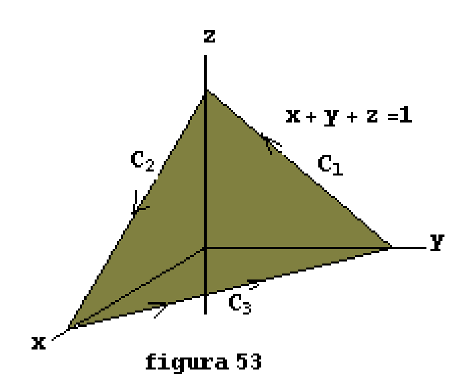


figura 53

$$\iint_{\varphi(A)} (\nabla \times \ F) \cdot nds = \oint_C F \cdot d\alpha = \oint_C P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

Recuerde que $RotF = (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) = (x, 0, -z)$, como $x + y + z = 1$ entonces $n = (1, 1, 1)$.Una parametrización para la superficie es $\varphi(x, y) = (x, y, 1 - x - y)$ y asì

i)

$$\iint_{\varphi(A)} (\nabla \times \ F) \cdot nds = \iint_{\varphi(A)} (x, 0, -z) \cdot nds = \iint_{proyxy} (x, 0, -(1 - x - y)) \cdot (1, 1, 1)dydx =$$

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} (x - (1 - x - y))dydx = 0$$

ii) La curva frontera de la superficie se descompone en C_1, C_2, C_3 donde una parametrización para la curva C_1 es $\alpha_1(t) = (0, 1 - t, t)$, $0 \le t \le 1$ $\alpha_1'(t) = (0, -1, 1)$ y

$$\oint_{C_1} xdx - xzdy + zdz = \int_0^1 tdt = \frac{1}{2}$$

Una parametrización para la curva C_2 es $\alpha_2(t) = (t, 0, 1 - t)$, $0 \le t \le 1$ $\alpha_2'(t) = (1, 0, -1)$ y

$$\oint_{C_2} xdx - xzdy + zdz = \int_0^1 (t - 1 + t)dt = 0$$

Una parametrización para la curva C_3 es $\alpha_3(t) = (1 - t, t, 0)$, $0 \le t \le 1$ $\alpha_3'(t) = (-1, 1, 0)$ y

$$\oint_{C_3} xdx - xzdy + zdz = \int_0^1 (1 - t)(-1)dt = \int_0^1 (t - 1)dt = -\frac{1}{2}$$

entonces

$$\oint_C xdx - xzdy + zdz = \oint_{C_1} xdx - xzdy + zdz + \oint_{C_2} xdx - xzdy + zdz + \oint_{C_3} xdx - xzdy + zdz$$

$$= 1/2 + 0 - 1/2 = 0$$

Ejemplo 8.22 *Sea* $F(x, y, z) = (x, -xz, z)$, $RotF = (x, 0, -z)$, $\varphi(A)$ *la superficie del paraboloide* $z = 10 - x^2 - y^2$ *para* $z \ge 1$ *fig 54, verificar que*

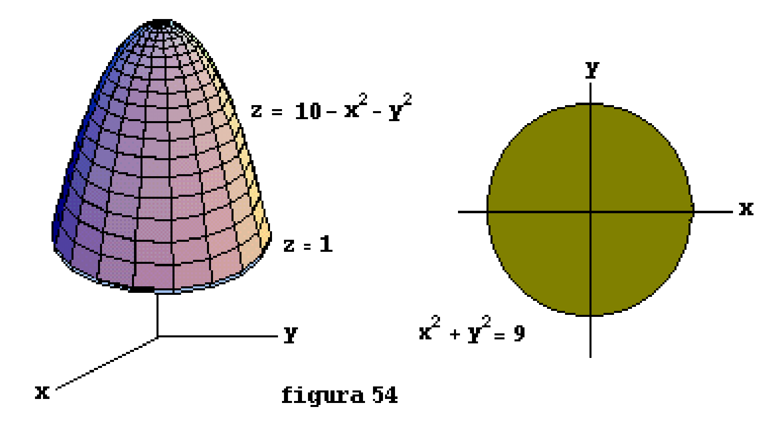


figura 54

$$\iint\limits_{\varphi(A)} (\nabla \times \ F) \cdot nds = \oint\limits_{C} xdx - xzdy + zdz$$

Una parametrización para la superficie del paraboloide $z = 10 - x^2 - y^2$ es

$$\varphi(x, y) = (x, y, 10 - x^2 - y^2) \quad n = (2x, 2y, 1)$$

y así

$i)$ $\displaystyle\iint\limits_{\varphi(A)} (\nabla\times \ F)\cdot nds = \iint\limits_{\varphi(A)} (x, 0, -z)\cdot nds = \iint\limits_{x^2+y^2\leq\ 9} (x, 0, -(10-x^2-y^2))\cdot(2x, 2y, 1)dydx =$

$$= \int\limits_{-3}^{3} \int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} (2x^2 + x^2 + y^2 - 10)dydx = \int\limits_{0}^{3} \int\limits_{0}^{2\pi} (2r^2 \cos^2\theta + r^2 - 10)rd\theta dr = -9\pi$$

Una parametrización para la curva frontera de la superficie C es

$$\alpha(t) = (3\cos t, 3\sin t, 1),\ 0 \leq t \leq 2\pi \ \ \alpha'(t) = (-3\sin t, 3\cos t, 0) \ \text{ entonces}$$

$$\oint\limits_{C} xdx - xzdy + zdz = \int\limits_{0}^{2\pi} ((-9\cos t)(\sin t) - 9\cos^2 t)dt = -9\pi$$

y así

$$\iint\limits_{\varphi(A)} (\nabla \times \ F) \cdot nds = \oint\limits_{C} xdx - xzdy + zdz$$

Ejemplo 8.23 *Sea*

$$F(x, y, z) = (x, -xz, z), \quad RotF = (x, 0, -z),$$

$\varphi(A)$, *la superficie del cono* $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ *hasta* $z = 3$ *y su tapa fig 55. Verificar que*

$$\iint\limits_{\varphi(A)} (\nabla \times \ F) \cdot nds = \oint\limits_{C} xdx - xzdy + zdz$$

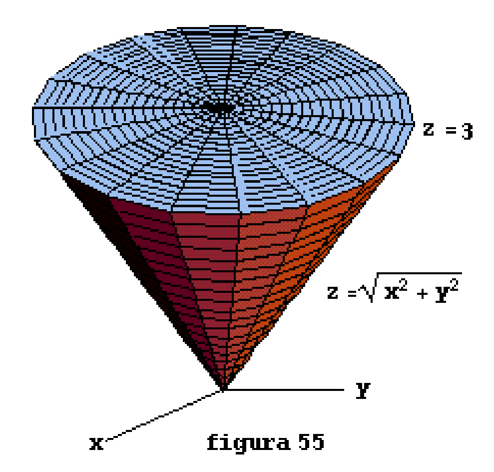


figura 55

$$i) \quad \iint\limits_{\varphi(A)} (\nabla \times \ F) \cdot n ds = \iint\limits_{\varphi_1(A)} (\nabla \times \ F) \cdot n_1 ds_1 + \iint\limits_{\varphi_2(A)} (\nabla \times \ F) \cdot n_2 ds_2$$

Una parametrización para la superficie $\varphi_1(A)$, $z = \sqrt{x^2+y^2}$ es

$$\varphi_1(x,y) = (x, y, \sqrt{x^2+y^2}), \ n = (\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1)$$

y así

$$\iint\limits_{\varphi_1(A)} (\nabla \times \ F) \cdot n_1 ds_1 = \iint\limits_{\varphi_1(A)} (x, 0, -z) \cdot n_1 ds_1 =$$

$$= \iint\limits_{x^2+y^2 \leq 9} (x, 0, -(\sqrt{x^2+y^2})) \cdot (\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1) dydx =$$

$$= \int\limits_{-3}^{3} \int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} (\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \sqrt{x^2+y^2}) dydx = \int\limits_{0}^{3} \int\limits_{0}^{2\pi} (r\cos^2\theta + r) r d\theta dr = 27\pi$$

Una parametrización para la superficie $\varphi_2(A)$, $z = 3$ es

$$\varphi_2(x,y) = (x, y, 3) \quad n_2 = (0, 0, 1)$$

y así

$$\iint_{\varphi_2(A)} (\nabla \times\ F) \cdot n_2 ds_2 = \iint_{\varphi_2(A)} (x, 0, -z) \cdot n_2 ds_2 = \iint_{x^2+y^2 \leq\ 9} (x, 0, -3) \cdot (0, 0, 1) dydx =$$

$$\int_{-3}^{3} \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} -3dydx = \int_0^3 \int_0^{2\pi} -3rd\theta dr = -27\pi$$

luego

$$\iint_{\varphi(A)} (\nabla \times\ F) \cdot nds = \iint_{\varphi_1(A)} (\nabla \times\ F) \cdot n_1 ds_1 + \iint_{\varphi_2(A)} (\nabla \times\ F) \cdot n_2 ds_2 = 27\pi - 27\pi = 0$$

Una parametrización para la curva frontera C_1de la tapa es

$$\alpha_1(t) = (3\cos t, 3\sin t, 3), \quad 0 \leq t \leq 2\pi \qquad \alpha'(t) = (-3\sin t, 3\cos t, 0)$$

$$\oint_{C_1} xdx - xzdy + zdz = \int_0^{2\pi} ((-9\cos t)(\sin t) - 27\cos^2 t)dt = -27\pi$$

Una parametrización para la curva frontera C_2 del cono es $\alpha_2(t) = (3\cos t, 3\sin t, 3)$ con orientación contraria a la de C_1 $\alpha'(t) = (-3\sin t, 3\cos t, 0)$

$$\oint_{C_2} xdx - xzdy + zdz = -\int_0^{2\pi} ((-9\cos t)(\sin t) - 27\cos^2 t)dt = 27\pi$$

$$\oint_C xdx - xzdy + zdz = \oint_{C_1} xdx - xzdy + zdz + \oint_{C_2} xdx - xzdy + zdz = -27\pi + 27\pi = 0$$

y así

$$\iint_{\varphi(A)} (\nabla \times\ F) \cdot nds = \oint_C xdx - xzdy + zdz$$

Ejemplo 8.24 *Sea*

$$F(x,y,z) = \left(\frac{-y^2}{2}, z, x \right), \;\; RotF = (-1,-1,y), \varphi(A)$$

la superficie del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ *entre* $z = 0$ *y* $z = 4$ *no cerrada. fig 56*

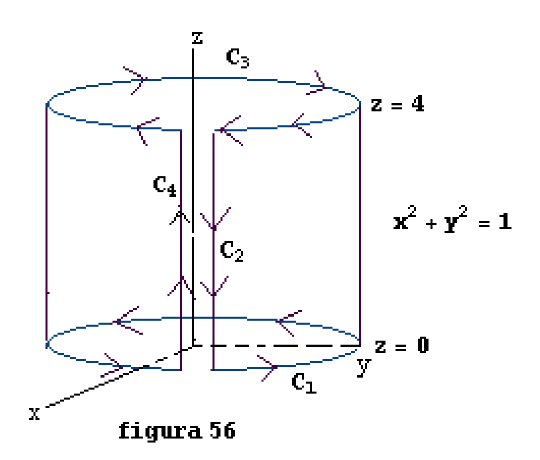


figura 56

Verificar que

$$\iint\limits_{\varphi(A)} (\nabla \times \; F) \cdot nds = \oint\limits_{C} \frac{-y^2}{2} dx + zdy + xdz$$

i) Una parametrización para la superficie del cilindro es $\varphi(u,v) = (\cos u, \sin u, v)$ $0 \leq u \leq 2\pi$ $\;\; 0 \leq v \leq 4$ $\;\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} = (\cos u, \sin u, 0) = n$ entonces

$$\iint\limits_{\varphi(A)} (\nabla \times F) \cdot nds = \int_0^{2\pi} \int_0^{4} (-1,-1,\sin u) \cdot (\cos u, \sin u, 0) dvdu = \int_0^{2\pi} \int_0^{4} (-\cos u - \sin u) dvdu = 0$$

ii) La curva frontera C de la superficie $x^2 + y^2 = 1$ se descompone en 4 curvas, luego

$$\oint\limits_{C} \frac{-y^2}{2} dx + zdy + xdz \;\; = \oint\limits_{C_1} \frac{-y^2}{2} dx + zdy + xdz \;\; + \oint\limits_{C_2} \frac{-y^2}{2} dx + zdy + xdz \;\; +$$

$$\oint\limits_{C_3} \frac{-y^2}{2} dx + zdy + xdz + \oint\limits_{C_4} \frac{-y^2}{2} dx + zdy + xdz \; = \oint\limits_{C_1} \frac{-y^2}{2} dx + zdy + xdz + \oint\limits_{C_3} \frac{-y^2}{2} dx + zdy + xdz +$$

$$\oint\limits_{C_2} \frac{-y^2}{2}dx+zdy+xdz-\oint\limits_{C_2} \frac{-y^2}{2}dx+zdy+xdz = \oint\limits_{C_1} \frac{-y^2}{2}dx+zdy+xdz+\oint\limits_{C_3} \frac{-y^2}{2}dx+zdy+xdz$$

Una parametrización para la curva frontera C_1 es

$$\alpha_1(t) = (\cos t, \sin t, 0),\ \ 0 \le t \le 2\pi \quad \alpha_1'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$$

Una parametrización para la curva frontera C_3 es $\alpha_3(t) = (\cos t, -\sin t, 4)$, $0 \le t \le 2\pi$ $\alpha_3'(t) = (-\sin t, -\cos t, 0)$ entonces

$$\oint\limits_{C_1} \frac{-y^2}{2}dx + zdy + xdz + \oint\limits_{C_3} \frac{-y^2}{2}dx + zdy + xdz =$$

$$= \int_0^{2\pi} (\frac{-\sin^2 t}{2}(-\sin t))dt + \int_0^{2\pi} (\frac{-\sin^2 t}{2}(-\sin t) - 4\cos t)dt = 0 + 0 = 0$$

Ejemplo 8.25 *Sea*

$$F(x, y, z) = (x, -xz, z), \quad RotF = (x, 0, -z)$$

$\varphi(A)$, *la superficie de la esfera* $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ *fig 57, Verifique que*

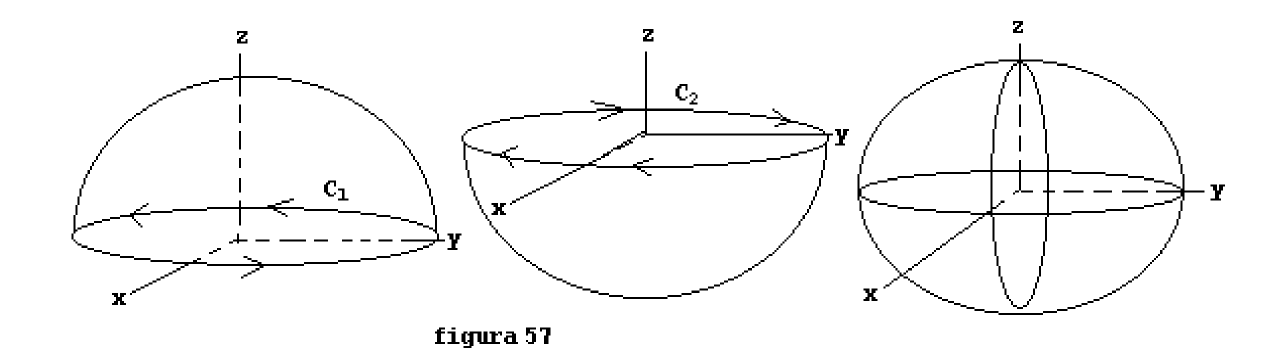


figura 57

$$\iint\limits_{\varphi(A)} (\nabla \times F) \cdot nds = \oint\limits_{C} xdx - xzdy + zdz$$

$i)$ Como la superficie de la esfera $x^2+y^2+z^2=4$ es cerrada para calcular la integral $\iint\limits_{\varphi(A)}(\nabla\times F)\cdot nds$ podemos aplicar el teorema de la divergencia, es decir,

$$\iint\limits_{\varphi(A)}(\nabla\times F)\cdot nds=\iiint\limits_{S} Div(RotF)dzdydx=\iiint\limits_{S}0dzdydx=0$$

$ii)$ Una parametrizión de la superficie esférica es

$$\varphi(u,v)=(2\cos u\sin v,2\sin u\sin v,2\cos v)\quad 0\leq u\leq 2\pi\quad 0\leq v\leq\pi\quad \text{y}$$

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial u}\times\frac{\partial\varphi}{\partial v}=(4\cos u\sin^2 v,4\sin u\sin^2 v,4\cos v\sin v)$$

es un vector normal y exterior a $\varphi(A)$ entonces

$$\iint\limits_{\varphi(A)}(\nabla\times F)\cdot nds=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(2\cos u\sin v,0,-2\cos v)\cdot(4\cos u\sin^2 v,4\sin u\sin^2 v,4\cos v\sin v)dvdu=$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(8\cos^2 u\sin^3 v-8\sin v\cos^2 v)dvdu=0$$

$iii)$ La superficie de la esfera $x^2+y^2+z^2=4$ se puede descomponer en dos superficies $z=\pm\sqrt{4-x^2-y^2}$, luego sea $\varphi_1(A)$ la superficie de $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ y $\varphi_2(A)$ $z=-\sqrt{4-x^2-y^2}$ entonces

$$\iint\limits_{\varphi(A)}(\nabla\times F)\cdot nds=\iint\limits_{\varphi_1(A)}(\nabla\times F)\cdot n_1ds_1+\iint\limits_{\varphi_2(A)}(\nabla\times F)\cdot n_2ds_2$$

Una parametrizaciòn para la superficie $\varphi_1(A)$ es

$$\varphi_1(x,y)=(x,y,\sqrt{4-x^2-y^2}),\ n=(\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}},\frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}},1)$$

y así

$a)$

$$\iint\limits_{\varphi_1(A)}(\nabla\times F)\cdot n_1ds_1=\iint\limits_{\varphi_1(A)}(x,0,-z)\cdot n_1ds_1=$$

$$= \iint_{x^2+y^2\leq 4} (x,0,-\sqrt{4-x^2-y^2})\cdot(\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}},\frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}},1)dydx =$$

$$= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}-\sqrt{4-x^2-y^2})dydx = 0 = \int_0^2\int_0^{2\pi}(\frac{r^2\cos^2\theta}{\sqrt{4-r^2}}-\sqrt{4-r^2})rd\theta dr = 0$$

Una parametrización para la superficie $\varphi_2(A)$ es

$$\varphi_2(x,y) = (x,y,-\sqrt{4-x^2-y^2}),\ n = (\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}},\frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}},-1)$$

y así

b)

$$\iint_{\varphi_2(A)} (\nabla\times\ F)\cdot n_2 ds_2 = \iint_{\varphi_2(A)}(x,0,-z)\cdot n_2 ds_2 =$$

$$= \iint_{x^2+y^2\leq 4} (x,0,\sqrt{4-x^2-y^2})\cdot(\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}},\frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}},-1)dydx =$$

$$= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2-y^2}} - \sqrt{4-x^2-y^2})dydx = \int_0^2\int_0^{2\pi}(\frac{r^2\cos^2\theta}{\sqrt{4-r^2}} - \sqrt{4-r^2})rd\theta dr = 0$$

c) Una parametrización para la curva frontera C_1de la superficie $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ es $\alpha_1(t) = (2\cos t, 2\sin t, 0),\ 0\leq t\leq 2\pi\ \ \alpha'(t) = (-2\sin t, 2\cos t, 0)$ y una parametrización para la curva frontera C_2 de la superficie $z=-\sqrt{4-x^2-y^2}$ es $\alpha_2(t) = (2\cos t, 2\sin t, 0)$ $\alpha'(t) = (-2\sin t, 2\cos t, 0,)$ con orientación en sentido contrario a C_1, luego

$$\oint_C xdx - xzdy + zdz = \oint_{C_1} xdx - xzdy + zdz + \oint_{C_2} xdx - xzdy + zdz =$$

$$= \oint_{C_1} xdx - xzdy + zdz - \oint_{C_1} xdx - xzdy + zdz = 0$$

Ejemplo 8.26 *Sea* $F(x,y,z) = (x, -xz, z)$, $RotF = (x, 0, -z)$, $\varphi(A)$ *la superficie del paraboloide* $z = x^2 + y^2$ *entre* $z = 1$ *y* $z = 9$ *y sus tapas fig 59, verificar que*

$$\iint\limits_{\varphi(A)} (\nabla \times \ F) \cdot nds = \oint\limits_C xdx - xzdy + zdz$$

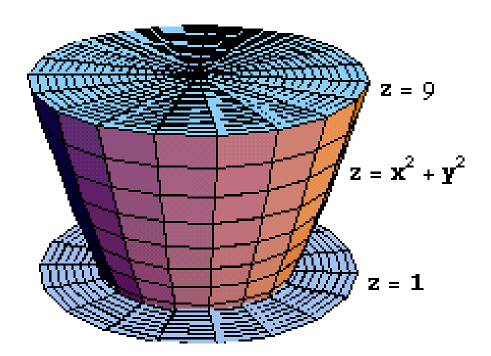


figura 59

Como la superficie es cerrada, para calcular $\iint\limits_{\varphi(A)} (\nabla\times \ F) \cdot nds$ podemos aplicar el teorema de la divergencia, es decir,

$$a) \quad \iint\limits_{\varphi(A)} (\nabla \times \ F) \cdot nds = \iiint\limits_S Div(RotF)dzdydx = \iiint\limits_S (1-1)dzdydx = 0$$

b)

$$\iint\limits_{\varphi(A)} (\nabla \times \ F) \cdot nds = \iint\limits_{\varphi_1(A)} (\nabla \times \ F) \cdot n_1 ds_1 + \iint\limits_{\varphi_2(A)} (\nabla \times \ F) \cdot n_2 ds_2 + \iint\limits_{\varphi_3(A)} (\nabla \times \ F) \cdot n_3 ds_3$$

Una parametrización para la superficie $\varphi_1(A), z = 9$ es $\varphi_1(x,y) = (x, y, 9)$ $n_1 = (0, 0, 1)$ y así

i)

$$\iint\limits_{\varphi_1(A)} (\nabla \times \ F) \cdot n_1 ds_1 = \iint\limits_{\varphi_1(A)} (x, 0, -z) \cdot n_1 ds_1 = \iint\limits_{x^2+y^2 \leq 9} (x, 0, -9) \cdot (0, 0, 1)dydx =$$

$$\int\limits_{-3}^{3} \int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} -9dydx = \int\limits_0^3 \int\limits_0^{2\pi} -9rd\theta dr = -81\pi$$

ii) Una parametrización para la superficie $\varphi_2(A), z = 1$ es $\varphi_2(x, y) = (x, y, 1)$ $n_2 = (0, 0, -1)$ y asì

$$\iint_{\varphi_2(A)} (\nabla \times F) \cdot n_2 ds_2 = \iint_{\varphi_2(A)} (x, 0, -z) \cdot n_2 ds_2 = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x, 0, -1) \cdot (0, 0, -1) dydx =$$

$$\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dydx = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r d\theta dr = \pi$$

iii) Una parametrización para la superficie $\varphi_3(A)$, $z = x^2 + y^2$ es $\varphi_3(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$ $\quad n_3 = (2x, 2y, -1)$ y así

$$\iint_{\varphi_3(A)} (\nabla \times F) \cdot n_3 ds_3 = \iint_{\varphi_3(A)} (x, 0, -z) \cdot n_3 ds_3 = \iint_{1 \leq x^2+y^2 \leq 9} (x, 0, -(x^2+y^2)) \cdot (2x, 2y, -1) dydx =$$

$$= \int_1^3 \int_0^{2\pi} (2r^2 \cos^2 \theta + r^2) r d\theta dr = 80\pi$$

luego

$$\iint_{\varphi(A)} (\nabla \times F) \cdot nds = \iint_{\varphi_1(A)} (\nabla \times F) \cdot n_1 ds_1 + \iint_{\varphi_2(A)} (\nabla \times F) \cdot n_2 ds_2 + \iint_{\varphi_3(A)} (\nabla \times F) \cdot n_3 ds_3$$

$$= -81\pi + \pi + 80\pi = 0$$

d)

$$\oint_C xdx - xzdy + zdz = \oint_C F \cdot d\alpha = \oint_{C_1} F \cdot d\alpha_1 + \oint_{C_2} F \cdot d\alpha_2 + \oint_{C_3} F \cdot d\alpha_3 + \oint_{C_4} F \cdot d\alpha_4 +$$

$$\int_{C_5} F \cdot d\alpha_5 + \int_{C_6} F \cdot d\alpha_6$$

$C_1 : x^2 + y^2 = 9$ en $z = 9$, $\alpha_1(t) = (3 \cos t, 3 \sin t, 9)$ $\quad 0 \leq t \leq 2\pi$ $\quad \alpha_1'(t) = (-3 \sin t, 3 \cos t, 0)$

C_2 : $x^2+y^2=9$ en $z=9$ $\alpha_1(t)=(3\cos t, 3\sin t, 9)$ $\alpha_1'(t)=(-3\sin t, 3\cos t, 0)$ sentido contrario a C_1

C_3 : $x^2+y^2=1$ en $z=1$ $\alpha_3(t)=(\cos t, \sin t, 1)$ $0\le t\le 2\pi$ $\alpha_1'(t)=(-\sin t, \cos t, 0)$

C_4 : $x^2+y^2=1$ en $z=1$ $\alpha_1(t)=(\cos t, \sin t, 1)$ $\alpha_1'(t)=(-\sin t, \cos t, 0)$ sentido contrario a C_3, C_5 y C_6 sus integrales se anulan (recorren el mismo camino en sentido contrario) así

$$\oint_C xdx - xzdy + zdz = \int_0^{2\pi}\left(-9\cos t\sin t - 81\cos^2 t\right)dt - \int_0^{2\pi}\left(-9\cos t\sin t - 81\cos^2 t\right)dt$$

$$+\int_0^{2\pi}\left(-\cos t\sin t - \cos^2 t\right)dt - \int_0^{2\pi}\left(-\cos t\sin t - \cos^2 t\right)dt + \int_{C_5} F\cdot d\alpha_5 - \int_{C_5} F\cdot d\alpha_5 = 0$$

luego

$$\iint_{\varphi(A)} (\nabla\times\ F)\cdot nds = \oint_C xdx - xzdy + zdz$$

Ejemplo 8.27 *Sea $F(x,y,z)=(\frac{-y^2}{2}, z, x)$, $RotF=(-1,-1,y)$ y C es la curva de intersección del paraboloide $z=x^2+y^2$ con el plano $z=2y$, verificar que*

$$\iint_{\varphi(A)} (\nabla\times\ F)\cdot nds = \oint_C \frac{-y^2}{2}dx + zdy + xdz$$

i) Una parametrización para la superficie $\varphi(A), z=2y$ es $\varphi(x,y)=(x,y,2y)$ y $n=(0,-2,1)$ y

$$\iint_{\varphi(A)} (\nabla\times\ F)\cdot nds = \iint_{x^2+(y-1)^2\le 1} (-1,-1,y)\cdot(0,-2,1)dydx = \iint_{x^2+(y-1)^2\le 1} (2+y)dydx =$$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\theta}(2+r\sin\theta)rdrd\theta = 3\pi.$$

ii) La ecuación $x^2+y^2-2y=0$ equivale a $x^2+(y-1)^2=1$ y así $\alpha(t)=(\cos t, 1+\sin t, 2+2\sin t)$ $\alpha'(t)=(-\sin t, \cos t, 2\cos t)$ $0\le t\le 2\pi$ y

$$\oint_C \frac{-y^2}{2}dx + zdy + xdz = \int_0^{2\pi}\left(-\frac{(1+\sin t)^2}{2}(-\sin t) + (2+2\sin t)\cos t + 2\cos^2 t\right)dt = 3\pi$$

Ejemplo 8.28 *Sea* $F(x,y,z)=(\frac{-y^2}{2},z,x)$, $RotF=(-1,-1,y)$ *y* C *es la curva de intersección del plano* $y+z=1$ *y el elipsoide* $2x^2+y^2+z^2=1$, *verificar que*

$$\iint\limits_{\varphi(A)}(\nabla\times\ F)\cdot nds=\oint\limits_{C}\frac{-y^2}{2}dx+zdy+xdz$$

i) Como $2x^2+y^2+z^2=1$ y $y+z=1$ entonces la curva de intersección es $x^2+y^2=y$, es decir, $x^2+(y-1/2)^2=1/4$.

Una parametrización para la superficie $\varphi(A), y+z=1$ es $\varphi(x,y)=(x,y,1-y)$ $n=(0,1,1)$

$$\iint\limits_{\varphi(A)}(\nabla\times\ F)\cdot nds=\iint\limits_{x^2+(y-1/2)^2\leq 1/4}(-1,-1,y)\cdot(0,1,1)dydx=\iint\limits_{x^2+(y-1/2)^2\leq 1/4}(y-1)dydx=$$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\sin\theta}(r\sin\theta-1)rdrd\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{1/2}((1/2)+r\sin\theta-1)\,rdrd\theta=-\frac{1}{8}\pi$$

ii) La ecuación $x^2+y^2-y=0$ equivale a $x^2+(y-1/2)^2=1/4$ y así $\alpha(t)=(\frac{\cos t}{2},\frac{1}{2}+\frac{\sin t}{2},\frac{1}{2}+\frac{\sin t}{2})$ $\alpha'(t)=(\frac{-\sin t}{2},\frac{\cos t}{2},\frac{\cos t}{2})$ $0\leq t\leq 2\pi$ y

$$\oint\limits_{C}\frac{-y^2}{2}dx+zdy+xdz\ =\int_0^{2\pi}(-\frac{(\frac{1}{2}+\frac{\sin t}{2})^2}{2}(\frac{-\sin t}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{\sin t}{2})\frac{\cos t}{2}-\frac{\cos t}{2}.\frac{\cot t}{2})dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sin^2 t}{8}+\frac{\sin^3 t}{16}-\frac{\cos^2 t}{4}\right)dt=-\frac{1}{8}\pi$$

Ejemplo 8.29 *Sea* $F(x,y,z)=(3y,-xz,yz^2)$ $\varphi(A)$ *la superficie del plano* $y+z=30$ *que está dentro del cilindro* $x^2+y^2=16$ *fig 62, verifique que :*

$$\iint\limits_{\varphi(A)}(\nabla\times F)\cdot nds=\oint\limits_{C}F\cdot d\alpha=\oint\limits_{C}P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=\oint\limits_{C}3ydx-xzdy+yz^2dz$$

$RotF=(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})=(z^2+x,0,-z-3)$, como $y+z=30$ entonces $n=(0,1,1)$

Una parametrizaciòn para la superficie $y+z=30$ es $\varphi(x,y)=(x,y,30-y)$ y así

i)

$$\iint\limits_{\varphi(A)} (\nabla\times F)\cdot nds = \iint\limits_{\varphi(A)} (z^2+x,0,-z-3)\cdot nds = \iint\limits_{x^2+y^2\leq 16} ((30-y)^2+x,0,y-30-3)\cdot(0,1,1)dxdy =$$

$$= \int_{-4}^{4}\int_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} (y-33)dydx = \int_0^4\int_0^{2\pi}(r\sin\theta-33)rd\theta dr = -528\pi$$

ii) Una parametrización de la curva C es $\alpha(t) = (4\cos t, 4\sin t, 30-4\sin t)\quad 0\leq t\leq 2\pi$ $\alpha'(t) = (-4\sin t, 4\cos t, -4\cos t)$ entonces

$$\oint_C 3ydx - xzdy + yz^2dz =$$

$$\int_0^{2\pi}(3(4\sin t)(-4\sin t)-(4\cos t)(30-4\sin t)(4\cos t)+(4\sin t)(30-4\sin t)^2(-4\cos t))dt = -528\pi$$

y así

$$\iint\limits_{\varphi(A)} (\nabla\times\ F)\cdot nds = \oint_C 3ydx - xzdy + yz^2dz = -528\pi$$

Ejemplo 8.30 *Sea* $F(x,y,z) = (3y, -xz, yz^2)$, *S el sólido limitado por las superficies*

$$z = 1-y^2,\ z=0,\ x=0, x=1,\ \textit{entonces, verificar las igualdades}$$

$$\iint\limits_{\varphi(A)} F\cdot nds = \iiint\limits_S DivFdzdydx \quad y$$

$$\iint\limits_{\varphi(A)} (\nabla\times\ F)\cdot nds = \oint_C P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz = \oint_C 3ydx-xzdy+yz^2dz$$

En efecto : La

$$divF = 2yz$$

y

$$RotF = (\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}) = (z^2+x,0,-z-3)$$

Entonces

$$\iiint\limits_{S} DivF dzdydx = \iiint\limits_{S} 2yzdzdydx = \int_{0}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-y^2} 2yzdzdydx = 0$$

Ahora la integral

$$\iint\limits_{\varphi(A)} F\cdot nds = \iint\limits_{\varphi_1(A)} F\cdot n_1ds_1 + \iint\limits_{\varphi_2(A)} F\cdot n_2ds_2 + \iint\limits_{\varphi_3(A)} F\cdot n_3ds_3 + \iint\limits_{\varphi_3(A)} F\cdot n_4ds_3 =$$

$$\int_{0}^{1}\int_{-1}^{1}\big(3y,-x(1-y^2),y(1-y^2)^2\big)\bullet(0,2y,1)dydx + \int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-y^2}\big(3y,0,yz^2\big)\bullet(-1,0,0)dzdy +$$

$$+\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-y^2}\big(3y,-z,yz^2\big)\bullet(1,0,0)dzdy + \int_{0}^{1}\int_{-1}^{1}(3y,0,0)\bullet(0,0,-1)dydx = 0$$

por tanto

$$\iint\limits_{\varphi(A)} F\cdot nds = \iiint\limits_{S} DivF dzdydx$$

Ahora

$$\iint\limits_{\varphi(A)}(\nabla\times\ F)\cdot nds = \iint\limits_{\varphi_1(A)}(\nabla\times\ F)\cdot n_1ds_1 + \iint\limits_{\varphi_2(A)}(\nabla\times\ F)\cdot n_2ds_2 + \iint\limits_{\varphi_3(A)}(\nabla\times\ F)\cdot n_3ds_3 +$$

$$\iint\limits_{\varphi_4(A)}(\nabla\times\ F)\cdot n_4ds_4 = 0$$

$$\int_{0}^{1}\int_{-1}^{1}\big((1-y^2)^2+x,0,-(1-y^2)-3\big)\bullet(0,2y,1)dydx + \int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-y^2}\big(z^2,0,-z-3\big)\bullet(-1,0,0)dzdy +$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-y^2}\big(z^2+1,0,-z-3\big)\bullet(1,0,0)dzdy + \int_{0}^{1}\int_{-1}^{1}(x,0,-3)\bullet(0,0,-1)dydx = 0$$

y

$$\oint\limits_{C} 3ydx - xzdy + yz^2dz = \oint\limits_{C_1} 3ydx - xzdy + yz^2dz + \oint\limits_{C_2} 3ydx - xzdy + yz^2dz + \oint\limits_{C_3} 3ydx - xzdy + yz^2dz +$$

$$\oint_{C_4} 3ydx - xzdy + yz^2dz + \oint_{C_5} 3ydx - xzdy + yz^2dz + \oint_{C_6} 3ydx - xzdy + yz^2dz + \oint_{C_7} 3ydx - xzdy + yz^2dz +$$

$$+ \oint_{C_8} 3ydx - xzdy + yz^2dz + \oint_{C_9} 3ydx - xzdy + yz^2dz + \oint_{C_{10}} 3ydx - xzdy + yz^2dz +$$

$$\oint_{C_{11}} 3ydx - xzdy + yz^2dz + \oint_{C_{12}} 3ydx - xzdy + yz^2dz = 0 \quad \textit{ya que}$$

Ahora

$$\oint_{C_1} 3ydx - xzdy + yz^2dz = -\oint_{C_5} 3ydx - xzdy + yz^2dz$$

$$\oint_{C_2} 3ydx - xzdy + yz^2dz = -\oint_{C_{12}} 3ydx - xzdy + yz^2dz$$

$$\oint_{C_3} 3ydx - xzdy + yz^2dz = -\oint_{C_7} 3ydx - xzdy + yz^2dz$$

$$\oint_{C_4} 3ydx - xzdy + yz^2dz = -\oint_{C_{10}} 3ydx - xzdy + yz^2dz$$

$$\oint_{C_6} 3ydx - xzdy + yz^2dz = -\oint_{C_{11}} 3ydx - xzdy + yz^2dz$$

$$\oint_{C_8} 3ydx - xzdy + yz^2dz = -\oint_{C_9} 3ydx - xzdy + yz^2dz$$

las parametrizaciones de cada curva son

$$\alpha_1(t) = (-t, 1, 0) \quad -1 \leq t \leq 0, \qquad \alpha_2(t) = (0, -t, 1 - t^2) \quad -1 \leq t \leq 1$$

$$\alpha_3(t) = (t, -1, 0) \quad 0 \leq t \leq 1, \alpha_4(t) = (1, t, 1 - t^2) \quad -1 \leq t \leq 1$$

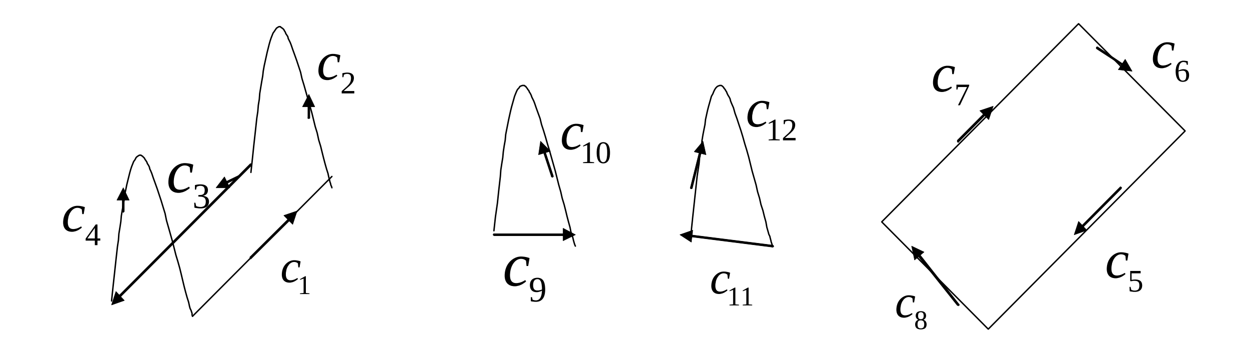
$$\alpha_5(t) = (t, 1, 0) \quad 0 \leq t \leq 1, \quad \alpha_6(t) = (0, t, 0) \quad -1 \leq t \leq 1$$

$$\alpha_7(t) = (-t, -1, 0) \quad -1 \leq t \leq 0, \ \alpha_8(t) = (1, -t, 0) \quad -1 \leq t \leq 1$$

$$\alpha_9(t) = (1, t, 0) \quad -1 \leq t \leq 1, \quad \alpha_{10}(t) = (1, -t, 1 - t^2) \quad -1 \leq t \leq 1$$

$$\alpha_{11}(t) = (0, -t, 0) \quad -1 \leq t \leq 1, \qquad \alpha_{12}(t) = (0, t, 1 - t^2) \quad -1 \leq t \leq 1$$

Observe las figuras para las parametrizaciones



Ejercicio 23

1. Considere el sólido limitado por las superficies $z = 1 - x^2, z = 0, y = -2$, $y = 2$ y $F(x, y, z) = (zx, y, z)$ para que ilustre el teorema de la Divergencia y el de Stokes

2. Considere el sólido limitado por las superficies $z = 1 - y, z = 0, x = 2, y = 0$, $x = 0$ y $F(x, y, z) = (zx, y, z)$ para que ilustre el teorema de la Divergencia y el de Stokes

3. Considere el sólido limitado por las superficies $z = 16 - \sqrt{x^2 + y^2}$ y el plano $z = 7$ y $F(x, y, z) = (zx, y, z)$ para que ilustre el teorema de la Divergencia y el de Stokes

4. Considere el sólido limitado por las superficies $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ y el plano $z = -7$ y $F(x, y, z) = (zx, y, z)$ para que ilustre el teorema de la Divergencia y el de Stokes

5. Calcular $\iint\limits_{\varphi(A)} F{\cdot}nds$ si $\varphi(A)$ es la superficie de la esfera $(x-3)^2+(y-1)^2+(z-2)^2 = 9$

   y $F(x, y, z) = (2x + 3z, -xz + 3z, y^2 + 2z)$. Respuesta $4\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{3} r^2 \sin\varphi dr d\varphi d\theta$

6. calcular $\oint\limits_C 3ydx - xzdy + yz^2dz$ si C es la curva de intersección del plano $x + z = 10$

   con el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ Respuesta $\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{1}((10 - r\cos\theta)^2 + 2r\cos\theta - 13)rdrd\theta$

7. Considere el sólido limitado por las superficies $x^2 + y^2 = 4$, y los planos $z = 1$ y $z = 9$ $F(x, y, z) = (3y, -xz, yz^2)$ para que ilustre el teorema de la Divergencia y el de Stokes

8. Considere el sólido limitado por las superficies $z = 9 - x^2 - y^2$, $x^2 + y^2 = 4$ y el plano $z = 1$ $F(x, y, z) = (3y, -xz, yz^2)$ para que ilustre el teorema de la Divergencia y el de Stokes

9. calcular $\oint\limits_C 3ydx - xzdy + yz^2dz$ si C es la curva $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = \cos t + \sin t$ $0 \leq t \leq 2\pi$ Respuesta $\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{1}(-(r\cos\theta + r\sin\theta)^2 + r\sin\theta + 3)rdrd\theta$

10. Ilustre el terema de Stokes con el campo $F(x, y, z) = 3yi - xzj + yz^2k$. si $\varphi(A)$ es la superficie del plano $x + z = 30$ que se encuentra en el interior del cilindro $x^2 + y^2 = 1$

11. Ilustre el terema de Stokes con el campo $F(x, y, z) = 3yi - xzj + yz^2k$. si $\varphi(A)$ es la superficie $z = 9 - x^2 - y^2$ que se encuentra en el interior de cilindro $x^2 + y^2 = 1$

12. Considere el sólido limitdo por la superficies $z = 0, z = 4, x = 0, x = 1, y = 0, y = 4,$ e ilustre el terema de la Divergencia y el teorema de Stokes con el campo $F(x, y, z) = 3yi - xzj + yz^2k$.

13. Considere el sólido limitdo por la superficies, $z = 4 - x^2, z = 0, x = 0, y = 0, y = 3$, e ilustre el terema de la divergencia y el teorema de Stokes con el campo $F(x, y, z) = 3yi - xzj + yz^2k$.

14. Considere el sólido limitdo por la superficies, $x^2 + y^2 + z^2 = 36, z = 1, z = 3$, e ilustre el terema de la Divergencia y el teorema de Stokes con el campo $F(x, y, z) = 3yi - xzj + yz^2k$ Respuesta $\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\sqrt{27}}\int\limits_1^{3} 2rr\sin\theta zdzdrd\theta + \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\sqrt{27}}^{\sqrt{35}}\int\limits_1^{\sqrt{36-r^2}} 2rr\sin\theta zdzdrd\theta$

15. Considere el sólido limitdo por la superficies, $y = x^2, z = 0, z = 3, y = 2$ e ilustre el terema de la Divergencia y el teorema de Stokes con el campo $F(x, y, z) = 3yi - xzj + yz^2k$.

16. Considere el sólido limitdo por la superficies, $z = 1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $z = 1$, e ilustre el terema de la Divergencia y el teorema de Stokes con el campo $F(x, y, z) = 3yi - xzj + yz^2k$. Respuesta $\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{1}\int\limits_{1-\sqrt{1-r^2}}^{1} 2rr\sin\theta zdzdrd\theta$

17. Calcular $\oint\limits_C 3ydx - xzdy + yz^2dz$ si C es la curva $x^2 + y^2 = 1$, en $z = 1$ en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj Respuesta. $-\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{1} 4rdrd\theta$ o $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, 1)$ $0 \leq t \leq 2\pi$

18. Calcular $\oint\limits_C 3ydx - xzdy + yz^2dz$ si C es la curva , $|x| + |y| = 1$ en $z = 1$ y en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj. Respuesta. $-\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} 2dudv$ o $\alpha_1(t) = (-t, 1+t, 1)$ $-1 \leq t \leq 0$, $\alpha_2(t) = (-t, 1-t, 1)$ $0 \leq t \leq 1$, $\alpha_3(t) = (t, -t-1, 1)$ $-1 \leq t \leq 0, \alpha_4(t) = (t, t-1, 1)$ $0 \leq t \leq 1$ y calcule las cuatro integrales de linea

19. Calcular $\oint\limits_C 3ydx - xzdy + yz^2dz$ si C es el contorno del rectangulo de vértices (0,0,0), (0,0,1), (1,0,1),(1,0,0),$(0,0,0)$ en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj. Respuesta cero

20. Considere el sólido limitado por las superficies $z = 16 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 = 4x$, $z = 0$ y, calcular $\iint\limits_{\varphi(A)} F \cdot nds$ para el el campo $F(x, y, z) = xi + yj + zk$. Respuesta $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_{0}^{4\cos\theta}\int\limits_{0}^{16-r} 3rdzdrd\theta$

21. Un sólido esta limitado por las superficies $x^2 + y^2 + z^2 = 8$, $z^2 = x^2 + y^2$, (exterior al cono),calcular $\iint\limits_{\varphi(A)} F \cdot nds$ para el el campo $F(x, y, z) = xi + yj + zk$.Respuesta $\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{2}\int\limits_{-r}^{r} 3rdzdrd\theta + \int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{2}^{\sqrt{8}}\int\limits_{-\sqrt{8-r^2}}^{\sqrt{8-r^2}} 3rdzdrd\theta$

22. Considere el sólido limitado por las superficies $z = 16 - \sqrt{x^2 + y^2}$ y $x^2 + y^2 = 2y$ el plano $z = 0$ y $F(x, y, z) = (x, y, z)$ para que ilustre el teorema de la Divergencia y el de Stokes. Respuesta $\int\limits_{0}^{\pi}\int\limits_{0}^{2\sin\theta}\int\limits_{0}^{16-r} 3rdzdrd\theta$

23. Considere el sólido limitdo por la superficies, $x^2+y^2+z^2 = 4z, z = 1$ $z \leq 1$. Calcular $\iint\limits_{\varphi(A)} F \cdot nds$ para el el campo $F(x, y, z) = xi+yj+zk$. Respuesta $\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{\sqrt{3}}\int\limits_{2-\sqrt{4-r^2}}^{1} 3rdzdrd\theta$

BIBLIOGRAFÏA

APOSTOL,Tom M. Cálculus volúmen 2 ed reverté 1980
DEMIDOVICH, Problemas y ejercicios de análisi matemático ed Mir
EDWARDS Y PENNEY, Cálculo cuarta edición
FRANK AYRES, Cálculo Integral tercera edicion,McGraw Hill
GRANVILLE William, Cálculo diferencial e integral Hispano América
HOWARD ANTON, Cálculo con Geometria Análitica Ed Universitaria
LARSON, Cálculo integral sexta edición vol 2
SWOKOWSKI,Cálculo con Geometria Análitica Ed Iberoamericana tercera edición
SMITH, robert cálculo integral tomo 2